JAN DE WITT

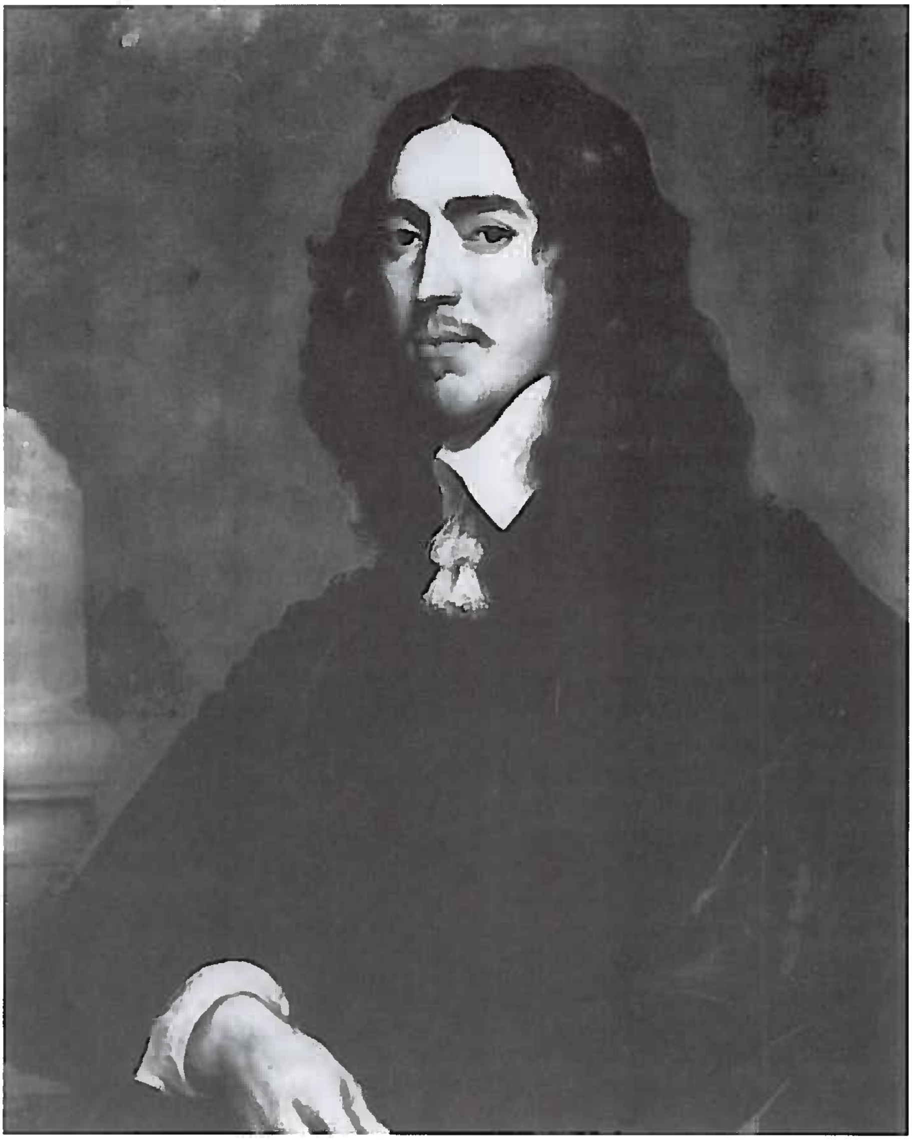
ELEMENTA CURVARUM LINEARUM LIBER SECUNDUS

TEKST, VERTALING, INLEIDING EN COMMENTAAR
DOOR A.W. GROOTENDORST

CWI Publications Varia

CWI
P.O. Box 94079, 1090 GB Amsterdam, The Netherlands
Telephone + 31 - 20 592 9333
Telefax + 31 - 20 592 4199
WWW page http://www.cwi.nl/publications_bibl/

CWI is the nationally funded Dutch institute for research in Mathematics and Computer Science.



Jan de Witt (1625–1672)

Adriaen Hanneman (1601–1671) pinxit
Bron: Museum Boijmans Van Beuningen, Rotterdam

François Viète

(1540–1603)

Frans van Schooten Jr.

(1615—1660)

Pierre de Fermat

(1601–1665)

René Descartes

(1596–1650)

JAN DE WITT

ELEMENTA
CURVARUM LINEARUM
LIBER SECUNDUS

TEKST, VERTALING, INLEIDING EN COMMENTAAR
DOOR A.W. GROOTENDORST

Ontwerp omslag: Tobias Baanders
ISBN 90 6196 514 4
NUGI code: 811

Druk: Grafisch bedrijf Ponsen & Looijen bv, Wageningen

piae memoriae
uxoris meae

Inhoud

Voorwoord

In 1997 verscheen bij het Centrum voor Wiskunde en Informatica te Amsterdam mijn vertaling in het Nederlands van het eerste deel van het tweedelige werk van Jan de Witt, getiteld *Elementa Curvarum Linearum*. In het voorwoord van deze uitgave kondigde ik aan dat deze vertaling gevolgd zou worden door een vertaling van *Liber Secundus*. Deze ligt nu voor u. Echter niet de vertaling alleen: evenals bij de genoemde uitgave van *Liber Primus* is de Latijnse tekst die daaraan ten grondslag ligt, toegevoegd. Het betreft ook hier de tekst van de tweede editie, uitgegeven in 1683 door de firma Blaeu in Amsterdam. Daarnaast vindt men een Inleiding, een Samenvatting, Aantekeningen, een Appendix en een Bibliografie.
De Inleiding is bedoeld om de lezer enig inzicht te verschaffen in de oorsprong en vroege ontwikkkeling van de analytische meetkunde. Nadere details zijn, om het betoog overzichtelijk te houden, verplaatst naar de Appendix. Degenen die van de geschiedenis van de wiskunde hun vak maken, zullen er geen nieuws in aantreffen, deze inleiding is bedoeld voor niet-specialisten, voor wie met name het deel over het probleem van Pappus interessant kan zijn. De Samenvatting geeft, evenals in de uitgave van *Liber Primus*, een volledig overzicht van de Stellingen, ook hier zonder de bewijzen. De rol van de Aantekeningen spreekt voor zichzelf; de Bibliografie is ruim opgezet, zonder de pretentie van volledigheid.
Zoals uit de Inleiding en elders meerdere malen blijkt, is *Liber Secundus* de essentie van *Elementa Curvarum Linearum*. Het eerste boek was slechts bedoeld als een noodzakelijke planimetrische inleiding tot het tweede.

Bij het voltooien van dit werk wil ik graag dank brengen aan allen die op enigerlei wijze hebben bijgedragen aan de totstandkoming daarvan. Deze dank geldt allereerst de redactie van CWI Publicaties en de directeur van het CWI, dr.ir. G. van Oortmerssen, voor hun bereidheid dit werk te willen uitgeven.
Deze bereidheid werd gerealiseerd dankzij de intensieve medewerking van een aantal medewerkers van de Communicatie- en Publicatiedienst. De voornaamste rol werd daarbij gespeeld door dr. Miente Bakker en mevrouw Minnie Middelberg. Zonder hun grote inzet zou mijn typoscript nooit de fraaie boekvorm gekregen hebben die het nu heeft. Hun bijdrage werd niet alleen gekenmerkt door grote deskundigheid, maar werd ook in een sfeer van grote hartelijkheid geleverd.
Voor de duidelijke tekeningen en de fraaie omslag van het boek ben ik de heer R.T. Baanders zeer dankbaar. Gaarne ook mijn dank aan alle medewerkers van het Repro Center, in het bijzonder noem ik hier de naam van de heer J. Schipper.
In feite is de basis van het werk de oorspronkelijke Latijnse tekst van Jan de Witt. Hierover kon ik beschikken dankzij de medewerking van mr. K.F. van Eijk, beheerder van het Trésor van de Universiteitsbibliotheek Delft. Ook hem dank ik zeer.

Tenslotte, maar niet in de laatste plaats, dank ik degenen die inhoudelijke adviezen gaven. Van hen noem ik in eerste instantie en met grote dank, mijn vriend en collega prof.dr. W. van der Meiden, die de omvangrijke taak op zich nam het gehele

typoscript naar inhoud en letter te beoordelen. Zijn ervaring als wiskundige en redacteur van de boekbesprekingen van het Nieuw Archief voor Wiskunde, leidde tot veel inhoudelijke en formele verbeteringen.
Met veel genoegen vermeld ik ook de informele gesprekken over mijn werk met een aantal collegae. Hier noem ik prof.dr J.M. Aarts, prof.dr. H.J.M. Bos en dr. J.P. Hogendijk.

Zo is dan de Nederlandse vertaling voltooid van *Elementa Curvarum Linearum*, het Magnum Opus van de Staatsman Jan de Witt, die gerekend mag worden tot de grootste wiskundigen van de 17^{e} eeuw en, naar veler oordeel, de grootste had kunnen zijn indien hij minder door staatszaken afgeleid zou zijn geweest, of met de woorden van Christiaan Huygens:
Nullum aeque saeculum geometrarum ferax fuisse arbitror, inter quos vir ille, si negotiis minus distringeretur vel principem locum obtinere posset.
In vertaling:
Naar mijn mening is geen eeuw zo rijk geweest aan wiskundigen, waaronder deze man (J. de Witt) zelfs de eerste plaats zou kunnen innemen indien hij minder door staatszaken werd afgeleid.

Met deze vertaling is het werk van deze grote geleerde voor een ruimere kring van hedendaagse wiskundigen toegankelijk geworden.

Den Haag, maart 2003 A.W. Grootendorst

1

Inleiding

1. Het tweede deel van de *Elementa Curvarum Linearum* van Jan de Witt is in feite de essentie van het gehele werk. Het eerste deel was slechts een noodzakelijke voorbereiding op *Liber Secundus*, waarnaar in de correspondentie en in deel I steeds verwezen wordt als naar de *tractatus* (of *compositio*) *locorum planorum et solidorum*.
Dit laatste geschrift was in het begin van 1658 aan Van Schooten jr. ter hand gesteld, en in een brief van 8 februari 1658 aan Jan de Witt drukt hij zijn grote waardering hiervoor uit en zegt daarbij toe het nauwgezet te zullen bestuderen en zich op alle wijzen te zullen inzetten bij de voorbereiding van een publicatie daarvan.
Op 6 oktober 1658 ontvangt Jan de Witt het resultaat van de inspanningen van Van Schooten retour en in de begeleidende brief schrijft deze dat hij het tractaat
... so veel 't mij doenlijck geweest is, accuraet (heeft) *naergesien...*
Van grote betekenis is in dit verband de passage waarin hij schrijft:

Hebbe in het uytschryven de voorszeide calculatie op monsieur Des Cartes manier gestelt en op eenige weynige plaetsen de woorden wat verandert, om doorgaens, so veel 't mogelijck was, overal de tael sijnder geometrie, die nu by meest alle de fraeyste verstanden de allerbekendste is, te gebruycken...

Jan de Witt antwoordt ogenblikkelijk met een brief van 8 oktober, waarin hij zijn grote dank uitspreekt, maar zegt dat hij *tegenwoordichlijck gansch geene ledichheydt* heeft om zich in dit werk te verdiepen; met klem zegt hij echter dat dit geschrift

Niet anders en mach voor de dach comen dan voorhenen gaende eene corte verhandelinge van de nature ende proprieteyten der cromme liniën.

Deze *corte verhandelinge* had hij kennelijk al klaar, want hij voegt deze aan de brief toe met het verzoek dit stuk...*insgelijkx eens te doorsien ende de faulten...te verbeteren.*

In de uiteindelijke publicatie is deze verhandeling *Liber Primus* geworden; deze geeft een mechanische beschrijving van de bekende kegelsneden als vlakke krommen, *absque ulla solida consideratione*, d.w.z. zonder enige ruimtelijke beschouwing.

De stijl van behandelen in *Liber Primus* verschilt duidelijk van die in *Liber Secundus*; in dit eerste deel is immers geen sprake van de *methodus van Des Cartes*, maar alle berekeningen verlopen volgens de methode van de meetkundige algebra van Euclides (zie [26] en aantekening (3.30) bij blz. [295] van *Liber Secundus*).
De daarin gegeven definities zouden dienen als basis voor *Liber Secundus*, waarvan de kern omschreven kan worden als de karakterisering van de kegelsneden door middel van vergelijkingen in twee variabelen x en y, die opgevat worden als de coördinaten (en dat zijn lijnstukken) van de punten op de krommen en de afleiding daaruit van hun eigenschappen, dit alles met behulp van de analytische methode.
Dit resulteert in een strak geordende opsomming van *Theoremata* (stellingen) en *Problemata* (vraagstukken). Op de structuur van dit werk komen we nog terug in paragraaf 10 van deze inleiding. Het geheel is eerder geschreven in de strakke stijl van de *Elementa* van Euclides dan in die van de *Géométrie* van Descartes en kan met recht gezien worden als het eerste systematische leerboek van de Analytische Meetkunde. Eerst in de *Elementa Matheseos Universalis* van Christian von Wolff (1679–1754) zou dit werk een opvolger krijgen.
Voor een goed begrip van de betekenis van *Liber Secundus* zullen we in deze inleiding enkele bekende relevante feiten bijeenzetten met als doel het werk van De Witt te plaatsen in de context van zijn tijd.

2. Wanneer de oorsprong van de analytische meetkunde aan de orde gesteld wordt, vallen onmiddellijk de namen van René Descartes (1596–1650) en Pierre de Fermat (1601–1665). De bronnen van hun inspiratie liggen echter in een verder verleden: de Griekse Oudheid met namen als Euclides (ca 300 v. Chr.), Archimedes (287–212 v. Chr.), Apollonius van Perga (tweede helft van de derde eeuw v. Chr.) en Pappus van Alexandrië (eerste helft van de vierde eeuw A.D.). De hulpmiddelen die hun bovendien impliciet werden aangereikt en die hun prestaties mede mogelijk maakten, dateren voor een groot deel uit de late middeleeuwen en de Renaissance. Hier worden slechts genoemd Nicole Oresme (ca. 1320–1382) en François Viète (1540–1603).

3. In de ontwikkelingsgeschiedenis van de analytische meetkunde neemt de *Collectio* (*Συναγωγη*) van Pappus een centrale plaats in. Daarvan zijn meerdere oorzaken aan te wijzen.
Dit verzamelwerk in acht boeken geeft een uitgebreid overzicht van het werk van een dertigtal wiskundigen, vanaf Euclides tot Pappus' tijdgenoot Hierius, en het is samengesteld door een overigens ook zelf bekwaam wiskundige. De betekenis ontleent het niet alleen aan de bespreking van ons nu nog bekende werken, maar vooral ook aan de, soms summiere, opmerkingen over geschriften die thans verloren zijn. Dit is wel het belangrijkste aspect van de *Collectio*; daardoor gaf deze aanleiding tot en steun bij de reconstructie van deze verloren werken.
Voor deze reconstructie was veel aandacht in de 16^e en 17^e eeuw, door de hernieuwde belangstelling voor de Griekse en Romeinse cultuur, die met de Renaissance weer opbloeide, met inbegrip van belangstelling voor de wiskunde uit die tijd.

Aan deze reconstructie werden belangrijke bijdragen geleverd door de Fransman Viète met zijn *Apollonius Gallus* (1600); door onze landgenoot Willebrord Snellius met zijn *Apollonius Batavus* (1607/1608); door de (van origine) Italiaan Ghetaldi met zijn *Apollonius Redivivus* (1607/1613), alsmede door Fermat met zijn reconstructie van de *Loci Plani* van Apollonius, die hij ca. 1630 ter hand stelde aan zijn vriend Prade en welke reconstructie hem mede inspireerde bij zijn opzet van de analytische meetkunde. Ook Frans van Schooten jr. heeft zich gewaagd aan een poging de *Loci* van Apollonius te reconstrueren. Hiervan vinden we de neerslag in zijn *Excercitationum Mathematicarum Libri V* (1656/1657).
In dit verband verdient het zevende boek van de *Collectio* bijzondere aandacht. Hierin vinden we niet alleen veel stellingen (meer dan 400) uit verloren gegane werken, maar ook een definitie van de fundamentele begrippen analyse (*αναλυσις*) en synthese (*συνθεσις*). Het staat bekend als de schatkamer van de analyse (*τοπος αναλυομενος*).
In de aanhef van dit werk, opgedragen aan zijn zoon Hermodorus, omschrijft Pappus de analyse als een onderwerp dat bestemd is voor hen die de bekende *Elementa* al beheersen en zich nu willen bekwamen in het oplossen van vraagstukken.
Als grondleggers van de analytische methode noemt Pappus Euclides, Apollonius en Aristaeus de Oudere (ca. 350 v. Chr.). Heath vermoedt echter dat het begrip analyse al in de school van Pythagoras bekend was (zie [32]).
Diogenes Laertius (3^{e} eeuw A.D.) schrijft dit begrip toe aan Plato, maar waarschijnlijk is dat Plato juist op de bijbehorende synthese de nadruk gelegd heeft.
Bij de synthetische opbouw van de *Elementa* van Euclides komt het begrip analyse niet expliciet voor, maar het kan een rol gespeeld hebben bij de heuristiek. In enkele handschriften van de *Elementa* komt het voor in een kanttekening; Heiberg veronderstelt dat het daarbij gaat om een interpolatie van de hand van Hero (ca. 60 A.D.), die verwijst naar onderzoekingen van Theaitetus (410–368 v.Chr.) of van Eudoxus (408–355 v.Chr.).
Direct na de inleiding geeft Pappus een definitie van analyse en synthese, en wel als volgt:
"Analyse is een methode waarbij men het gezochte als bekend veronderstelt en vandaar uit via een rij van gevolgtrekkingen uitkomt op iets waarover men het eens is op grond van synthese; want in de analyse veronderstelt men het gezochte, als bewezen of geconstrueerd, bekend en onderzoekt men waarvan dit het gevolg is en waaruit dit laatste weer volgt, zodat wij, op onze schreden terugkerend, uitkomen op iets dat al bekend is of behoort tot de uitgangspunten van de theorie; zo'n methode noemen we analyse; het is als het ware een oplossing in omgekeerde richting. Bij de synthese gaan we omgekeerd te werk: we gaan uit van het laatste resultaat van de analyse welk resultaat wij als juist erkenden. Vervolgens zetten we in hun natuurlijke volgorde op een rij, als gevolgen, wat bij de analyse oorzaken waren en door deze aaneen te schakelen bereiken we tenslotte het bewijs of de constructie van het gezochte en dit noemen wij synthese."
Hierbij willen we twee opmerkingen maken. Allereerst een taalkundige opmerking.

Het woord analyse wordt door Pappus omschreven als anapalin lusis *(ανα παλιν λυσις)* en dat is de Griekse term voor oplossing in omgekeerde volgorde. Synthese (*συνθεσις*) betekent samenstelling.
Verder wijzen we op de opmerkelijke gang van zaken bij de beschrijving van de analyse. Als we de stadia in de analyse aangeven met a_1, a_2 enz., waarbij a_1 het gezochte is, dan redeneert Pappus hier formeel niet als volgt: $a_1 \rightarrow a_2$, maar, $a_1 \leftarrow a_2$ waarbij a_2 een voldoende voorwaarde is voor a_1.
Met betrekking tot de analyse onderscheidt Pappus twee soorten:
Theoretische of zètetische analyse (van zèteo, zoeken), waarbij het gaat om de waarheid van een bewering.
Problematische of poristische analyse (van porizo, verschaffen; een porisma houdt het midden tussen een vraagstuk en een een stelling), waarbij het gaat om de mogelijkheid van een constructie of een berekening.
Bij de definitie van deze twee soorten analyse merkt Pappus nog nader op dat we hierbij moeten uitgaan van het gezochte alsof dit waar of mogelijk is en daarna, door het trekken van logische conclusies, uitkomen op iets waarvan bekend is dat het waar of mogelijk is of op iets waarvan bekend is dat het niet waar of niet mogelijk is.
In het eerste geval moeten we daarna de redenering in omgekeerde richting volgen om te conluderen tot de juistheid van het gestelde. Hiermee accentueert Papppus in feite dat elke stap in de redenering omkeerbaar moet zijn. In het tweede geval is het gestelde uiteraard onjuist.
Later zou Viète aan deze begrippen andere betekenissen toekennen en een derde soort analyse onderscheiden, de rhetische of exegetische analyse. Hierop komen we nog terug.

De *Collectio* ontleent zijn betekenis voor de ontwikkeling van de analytische meetkunde echter niet alleen aan de daarin voorkomende verwijzingen en aan de aandacht voor de begrippen analyse en synthese, maar ook en vooral aan het daarin geformuleerde probleem dat nadien de geschiedenis zou ingaan als het probleem van Pappus.
In moderne notatie kunnen we dit probleem als volgt formuleren:
In het platte vlak zijn drie of vier rechte lijnen $l_1, l_2, l_3, (l_4)$ gegeven. Men vraagt nu naar de verzameling van de punten *P* die de eigenschap hebben dat de afstanden $d_1, d_2, d_3, (d_4)$ van *P* tot achtereenvolgens $l_1, l_2, l_3, (l_4)$ voldoen aan

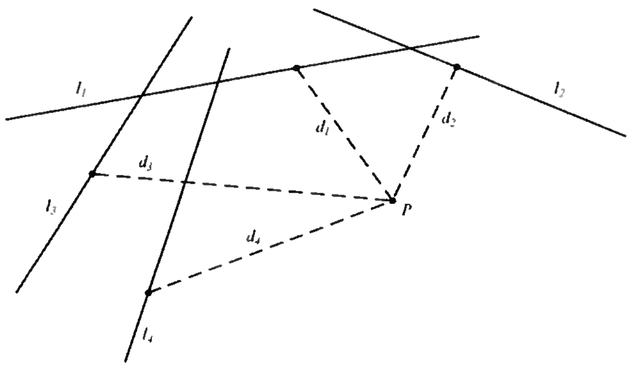
i. $d_1 d_2 : d_3^2$ = constant (in het geval van drie lijnen)

ii. $d_1 d_2 : d_3 d_4$ = constant (in het geval van vier lijnen).

Voor deze afstanden kan men de loodrechte afstanden nemen, maar ook afstanden in een bij elke rechte l_i afzonderlijk bepaalde richting. Het is duidelijk dat deze keuze niets verandert aan de aard van het probleem.
Een mogelijke generalisatie tot meer dan vier lijnen ligt voor de hand en wordt al door Pappus zelf geopperd (*Collectio* vii, 38–40; ed. Hultsch blz. 680, en Y. Thomas, dl.II, blz. 601–603).

In het geval van vijf lijnen, $l_1, l_2, ..., l_5$ gaat het om de afstanden $d_1, d_2, ..., d_5$. Pappus beschouwt nu de twee parallellepipeda die ingesloten worden door achtereenvolgens d_1, d_2, d_3 en door d_4, d_5 en een willekeurig gekozen lijnstuk a. De eis wordt nu dat de verhouding van hun inhouden, dus $d_1 d_2 d_3 : a d_4 d_5$ constant is.

In het geval van zes lijnen gaat het om zes afstanden, $d_1, d_2, ..., d_6$. De eis is dan dat de verhouding $d_1 d_2 d_3 : d_4 d_5 d_6$ constant is. De situatie voor vier lijnen is weergegeven in Figuur 1.3.1; reeds nu vermelden we dat de bedoelde plaatsen in dit geval kegelsneden zullen blijken te zijn.



FIGUUR 1.3.1

In het algemene geval van een even aantal lijnen, zeg $2n$, wordt de eis dat de verhouding

$$d_1 d_2 ... d_n : d_{n+1} d_{n+2} \dots d_{2n} \text{ constant is}$$

en bij een oneven aantal lijnen, zeg $2n+1$, wordt de eis dat de verhouding

$$d_1 d_2 ... d_{n+1} : a d_{n+2} d_{n+3} \dots d_{2n+1} \text{ constant is,}$$

waarbij a weer een willekeurig gekozen lijnstuk is.

Voor de achtergronden van dit probleem wordt de lezer verwezen naar Appendix §1.

4. Van degenen die hun inspiratie vonden in de *Collectio* van Pappus, in het bijzonder in Boek VII, noemen wij hier als eerste François Viète (1540–1603), die als jurist werkzaam was in overheidsdienst en in zijn vrije tijd intensief de wiskunde beoefende.

Hierboven noemden we hem al in verband met zijn *Apollonius Gallus*, een reconstructie van werken van Apollonius, en ook in verband met zijn visie op de begrippen analyse en synthese zoals die door Pappus gepresenteerd waren.

Als zijn belangrijkste wiskundige werk geldt *In artem analyticen isagoge*, dat in 1591 verscheen in Tours. Dit werk begint met een hoofdstuk over het begrip analyse, dat hierboven al aan de orde kwam. Tegenover de tweedeling door Pappus, stelt hij zijn eigen driedeling. Bij hem is zètetische analyse het opstellen van een

vergelijking of een verhouding (met bekende coëfficiënten) waaraan de onbekende moet voldoen. Met deze onbekende wordt dan gerekend alsof hij bekend is. In de poristische analyse wordt de juistheid van een stelling onderzocht door middel van deze vergelijking of verhouding, terwijl door middel van de rhetische of exegetische analyse de gezochte onbekende uit de opgestelde vergelijking of verhouding wordt afgeleid. In feite algebraïseert Viète het begrip analyse, dat hij karakteriseert als *doctrina bene inveniendi in mathematicis*, d.w.z. de leer om op de juiste manier ontdekkingen te doen in de wiskunde.
Hierna geeft hij als eerste een consequente letternotatie in de arithmetica waardoor deze zich uiteindelijk kon ontwikkelen tot een abstracte algebra. Op dit gebied had hij weliswaar voorgangers zoals Diophantus (ca. 250 AD) met zijn zgn. gesyncopeerde arithmetische notatie en Bombelli (1526–1572), en ook werd zijn systeem verbeterd door Descartes, maar hij voerde als eerste klinkers in voor onbekende grootheden en medeklinkers voor bekende grootheden (beide in hoofdletters). Ook gebruikte hij stelselmatig de tekens + en – , maar het begrip gelijkheid bleef hij aanvankelijk omschrijven met woorden, later met het teken ~. Het gelijkteken van Descartes, namelijk ꝏ, bleef lang in gebruik tot het door het teken = van Recorde blijvend werd vervangen. Voor machten van grootheden had Viète een verbale omschrijving die zijn meetkundige gedachten duidelijk verraadt. Hierbij had hij voor machten van bekende en van onbekende grootheden verschillende notaties. Zo omschreef hij de 1^e-, 2^e-, 3^e- en 4^e-machten van bekende grootheden met longitudo (of latitudo), planum, solidum, plano-planum, maar die van onbekende grootheden met latus (of radix), quadratum, cubus, quadrato-quadratum. Zo had hij ook analoge uitdrukkingen voor hogere machten, tot en met de negende macht.

Een voorbeeld: *B A* quadratum + *C* planum *A* aequalia *D* solido,

komt overeen met ons: $bx^2 + c^2x = d^3$.

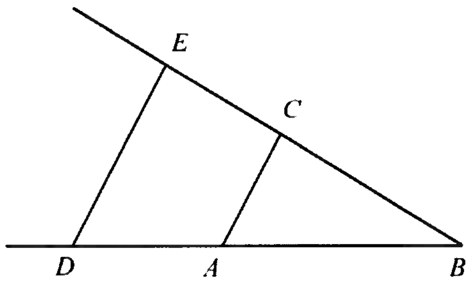
Zijn meetkundige interpretatie van producten weerspiegelt zich niet alleen in zijn notatie, maar dwingt hem ook tot homogeniteit in de formules omdat, naar de eis van Aristoteles, alleen gelijksoortige grootheden met elkaar kunnen en mogen worden vergeleken. De termen van een vergelijking worden dan ook de *homogenea* genoemd.
Opvallend is dat hij toch over hogere dan derde machten spreekt ondanks het feit dat deze geen meetkundige betekenis hebben. Descartes zou dit dilemma later oplossen.
Uiteraard omvatten de innovaties van Viète meer dan die welke we hier noemden. Deze laatste zijn echter van uitzonderlijk belang: hier ontstond de onderscheiding *logistica numerosa*, het rekenen met concrete getallen, versus *logistica speciosa*, het rekenen met letters. Daardoor kon men over vergelijkingen in algemene termen spreken en was men niet langer aangewezen op concrete voorbeelden. Ook komt door de logistica speciosa in de oplossing duidelijk naar voren hoe deze afhangt van de coëfficiënten van de vergelijking.
Viète gebruikte zijn notaties ook en vooral voor het oplossen van meetkundige vraagstukken. Daartoe zette hij het probleem om in een algebraïsche vergelijking in één onbekende, die hij met zijn nieuwe techniek oploste, waarna hij de oplossing

construeerde (indien mogelijk). De 'constructie van vergelijkingen', d.w.z. de meetkundige oplossing daarvan, verliep voortaan via de algebra in tegenstelling tot de meetkundige en verbale technieken van de Oudheid (zie ook [26] en [27]). Een bekend en veel aangehaald voorbeeld is het bepalen van de zijden van een rechthoek wanneer hun verhouding en de oppervlakte van de rechthoek gegeven zijn.
Uiteraard lukte een constructie met passer en liniaal alleen maar indien het ging om een vergelijking van hoogstens de graad twee. Vergelijkingen van de graad drie of vier konden wel algebraïsch worden opgelost, maar hun wortels kon men in het algemeen niet met passer en liniaal construeren. Voor deze en andere gevallen, stelde Viète het gebruik van andere instrumenten voor. Hij volgde daarbij niet de methode die al door Menaechmus (ca. 350 v. Chr.) gebruikt was, namelijk het onderling snijden van krommen. Als voorbeeld daarvan geven we hier, in onze notatie, de manier waarop Menaechmus de beide middelevenredigen x en y tussen a en b bepaalde $(a < b)$.

Uit $a : x = x : y = y : b$ volgt $x^2 = ay$ en $y^2 = bx$ (en ook $xy = ab$), zodat $x^4 = a^2y^2$ en dus $x^3 = a^2b$ (en $y^3 = ab^2$). Menaechmus loste deze vergelijking op door twee van de door hem ontdekte kegelsneden, waarvan hij de meetkundige eigenschappen kende, met elkaar te snijden. Anachronistisch gezegd: hij sneed de parabool met eigenschap $x^2 = ay$ met de parabool gekarakteriseerd door $y^2 = bx$.
Reeds nu zij opgemerkt dat Descartes en Fermat deze methode zouden voortzetten met krommen van hogere graad.
Uit het bovenstaande blijkt dat Viète niet toegekomen is aan de analytische meetkunde: hij tekende geen krommen, anders dan een rechte of een cirkel, en gebruikte geen coördinatenstelsel. Maar het belangrijkste tekort is wel dat hij zich beperkte tot zogenaamde 'bepaalde' vergelijkingen, dat wil zeggen tot vergelijkingen in één onbekende, met constante coëfficiënten. Vergelijkingen in twee variabelen kende hij niet waardoor hij de kans miste om loci ($\tau o\pi o\iota$), vroeger meetkundige plaatsen genoemd, algebraïsch te beschrijven.

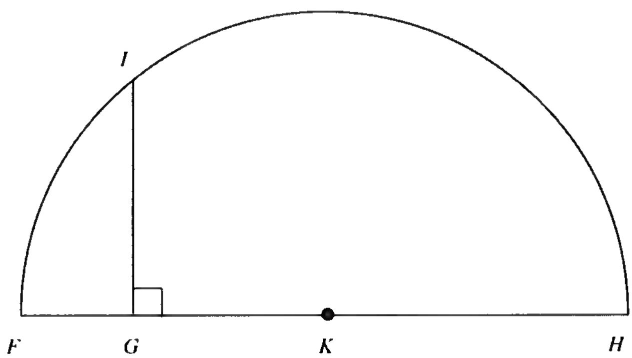
5. De eerste fundamentele bijdrage van Descartes aan de grondslagen van de analytische meetkunde is de creatie van een eigen algebraïsch apparaat, inclusief een notatie die wij nu nog gebruiken, afgezien van het gelijkteken waarvoor Descartes, zoals gezegd, het teken ∝ koos. Hiermee, maar niet alleen hiermee, overvleugelde hij Viète, hetgeen hij zich wel bewust was: *...je commence en cela par ou Viète a finy.* (...ik begin op dit gebied daar waar Viète is opgehouden).
Kort gezegd komt de vernieuwing van Descartes hierop neer dat hij voor lijnstukken de operaties optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen (en daarmee ook machtsverheffen en worteltrekken) zodanig definieerde dat de resultaten van deze bewerkingen weer lijnstukken zijn, zodat dus de verzameling lijnstukken gesloten is onder deze operaties. Zoals we al in *Liber Primus* zagen, was dit niet het geval in de wiskunde van de Grieken: som en verschil van lijnstukken was wel een lijnstuk, maar het product van twee lijnstukken was een rechthoek en

het product van drie lijnstukken een rechthoekig parallellepipedum. Het product van meer dan drie lijnstukken was een problematische zaak (zie hiervoor Appendix §1). Al op de eerste bladzijde van de *Géométrie* ontvouwt Descartes zijn ideeën. Daarbij is essentieel is dat hij een vast lijnstuk invoert dat als eenheid 1 zal dienen. De evenredigheden $1 : a = b : p$ en $1 : b = q : a$ leveren het product $p = ab$ en het quotiënt $q = a/b$. Figuur 1.5.1 geeft de bijbehorende constructies.



FIGUUR 1.5.1

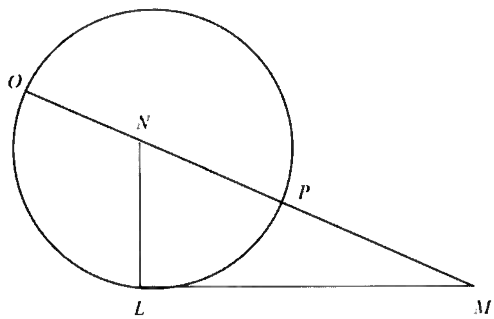
Hierin geldt $AB = 1$ en $AC \parallel DE$, zodat $1 : BD = BC : BE$, en dus $BE = BD.BC$ en $BC = BE/BD$.
Voor de worteltrekking gebruikt Descartes de bekende eigenschap van de hoogtelijn in een rechthoekige driehoek en geeft als voorbeeld Figuur 1.5.2, waarin *FG* en *GH* gegeven lijnstukken zijn, *IG* loodrecht staat op *FH*, en *FIH* een halve cirkel is met *FH* als middellijn; het is dan duidelijk dat $IG^2 = FG.GH$.



FIGUUR 1.5.2

Een belangrijk gevolg van de introductie van het eenheidslijnstuk is dat Descartes de eis van homogeniteit kon laten vallen. Alle producten en quotiënten van lijnstukken zijn immers eveneens lijnstukken. Viète eiste nog dat in een vergelijking of gelijkheid alle voorkomende grootheden van dezelfde soort moesten zijn:

allemaal lijnstukken of allemaal oppervlakten of allemaal inhouden. Bij Descartes echter is a^2b^2-b per constructie een lijnstuk, al zegt hij erbij dat men, bijvoorbeeld bij het trekken van de derdemachtswortel, deze vorm kan schrijven als een derdegraadspolynoom, nl. als $\frac{a^2b^2}{1}-1^2b$. Merkwaardig is dat Descartes toch nog wel (bijv. in de *Géométrie* blz. 336) spreekt over het product van drie lijnstukken als *le parallelepipede composé de trois lignes*.
Direct daarop voert Descartes de ons zo vertrouwde notaties in: a, b, c ... voor bekende lijnstukken en ... x, y, z. voor onbekende lijnstukken. Verder ook cijferexponenten en het wortelteken. Over het afwijkende gelijkteken spraken we al. Naar deze innovaties verwijst Van Schooten als naar *monsieur Des Cartes manier*.
Als eerste toepassing geeft Descartes de constructieve oplossing van de vierkantsvergelijking $z^2=az+b^2$. Zoals gewoonlijk beperkt hij zich tot de positieve wortel, de negatieve laat hij, als *racine fausse*, buiten beschouwing.
Figuur 1.5.3 geeft de situatie weer. Stelt men de straal NL van de cirkel met middelpunt N op $a/2$, de lengte van de raaklijn LM op b, dan ziet men direct in dat $MO=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}$, waaruit Descartes zonder meer concludeert dat dit het gezochte lijnstuk z is. Uit dezelfde figuur leidt hij af dat MP de oplossing is van de vergelijking $y^2=-ay+b^2$. Voor de oplossing van $z^2=az-b^2$, gebruikt hij een analoge methode in een andere figuur; de vergelijking $z^2=-az-b^2$, die geen positieve wortels heeft, komt uiteraard niet aan de orde.
Na deze algebraïsche voorbereidingen gaat Descartes over tot zijn basismethode voor de analytische meetkunde, die hij demonstreert aan de hand van het bovengenoemde probleem van Pappus.

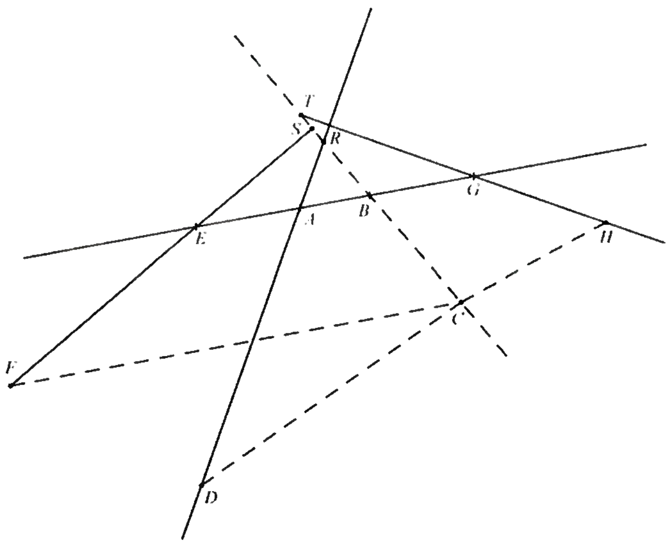


FIGUUR 1.5.3

Dit probleem was hem in 1631 voorgelegd door de Leidse hoogleraar wiskunde en Arabisch, Jacobus Golius (1596–1667). Binnen enkele weken deelt hij zijn oplossing per brief mede aan Golius en deze oplossing heeft hij ook opgenomen in het eerste boek van de *Géométrie* (blz. 309–314 en 324–335). Zijn behandeling van

dit probleem was niet alleen de eerste toepassing van de methode die ten grondslag ligt aan de analytische meetkunde, maar het resultaat inspireerde hem mede tot zijn beschouwingen over wat hij 'toelaatbare krommen' noemde.
Voorafgaande aan deze oplossing geeft hij een uitgebreid relaas over de plaats van dit probleem in de Oudheid, met een aantal stevige schimpscheuten aan de Griekse wiskundigen in het algemeen en aan Pappus in het bijzonder.
Zijn oplossing kondigt hij daarna zonder al te veel enthousiasme aan (*Géométrie*, blz. 309):
En sorte que ie pense auoir entierement satisfait a ceque Pappus nous dit auoir esté cherché en cecy par les anciens & ie tascheray d'en mettre la demonstration en peu de mots, car il m'ennuie desia d'en tant escrir.
In vertaling:
Zodat ik meen geheel voldaan te hebben aan datgene wat volgens Pappus op dit gebied door de Ouden gezocht is en ik zal trachten het bewijs ervan in weinig woorden te geven, want het verveelt mij al er zoveel over te schrijven.
Voor een goed begrip geven wij hier eerst Descartes' oplossing van het Pappusprobleem voor vier lijnen. Hierbij sluiten we ons nauw aan bij zijn bewijs, inclusief zijn notaties. Ook de bijbehorende Figuur 1.5.4 is ontleend aan de *Géométrie*.
In het platte vlak zijn vier vaste rechten, AB, AD, EF en GH, gegeven. Bij elke rechte hoort een vaste richting. Deze richtingen zijn in de figuur weergegeven door stippellijnen vanuit een punt C: CB, CD, CF, en CH.
De vraag is nu de plaats te bepalen van het punt C waarvoor geldt dat de verhouding $CB.CD : CF.CH$ een vaste waarde heeft, waarvoor Descartes 1 kiest.
Het gaat hier dus om het opstellen van de vergelijking van een vlakke kromme die op meetkundige wijze is gedefinieerd. Fermat en ook Jan de Witt gaan juist anders te werk: zij gaan uit van een gegeven vergelijking en onderzoeken welke kromme daardoor wordt voorgesteld.
De oplossingsmethode van Descartes komt hier op neer dat hij de rechte door A en B als abscis-as kiest, A als oorsprong hierop, en de richting die bij AB behoort, als ordinaatrichting (in dit geval van B naar C). Zo krijgt het getekende punt C als abscis AB (= x) en als ordinaat BC (= y). De eerste gezochte afstand, CB, is dus gelijk aan y.
De hoeken bij A liggen vast, de hoeken bij B zijn ook gegeven, zodat van de driehoek ABR de hoeken bekend zijn en dus ook de verhouding van de zijden vastligt. Descartes stelt hierbij $AB : BR = z : b$, waaruit volgt $BR = \frac{bx}{z}$, met bekende b en z. In onze figuur geldt dan $CR = y + \frac{bx}{z}$.
Van driehoek DCR zijn ook alle hoeken bekend en dus ook weer de verhoudingen van de zijden. Descartes stelt nu $CR : CD = z : c$ met dezelfde z als hierboven. Dit levert, met de reeds gevonden CR, voor de tweede afstand, CD,

$$CD = \frac{c.CR}{z} = \frac{cy}{z} + \frac{bcx}{z^2}.$$



FIGUUR 1.5.4

Op analoge wijze gaat Descartes verder. Allereerst stelt hij in driehoek *SBE* de bekende afstand *AE* op *k*, zodat $EB = k + x$. Voor de bekende verhouding van de zijden *BE* en *BS* schrijft hij $BE : BS = z : d$, met weer dezelfde z, waardoor

$$BS = \frac{d.BE}{z} = \frac{d(k+x)}{z},$$

zodat
$$CS = BC + BS = y + BS = \frac{zy + dk + dx}{z}.$$

Vervolgens stelt Descartes de bekende verhouding $CS : CF$ op $z : e$ en dan blijkt voor de derde gezochte afstand, CF, te gelden

$$CF = \frac{ezy + dek + dex}{z^2}.$$

Zo gaat hij verder: hij stelt $AG = l$ (dus $BG = l - x$), $BG : BT = z : f$, $TC : CH = z : g$ en vindt dan tenslotte voor de vierde afstand, *CH*,

$$CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{z^2}.$$

De eerste conclusie die Descartes hieruit trekt is dat, ongeacht het gegeven aantal lijnen, de gezochte afstanden lineaire vormen in x en y zijn. Uiteraard gebruikt hij deze laatste uitdrukking niet, maar hij beschrijft hoe zo'n vorm er uitziet. Voor de gevallen waarin een of meer lijnen evenwijdig zijn aan *AB* of aan *BC*, maakt hij een uitzondering op zijn beschrijving van lineaire vorm, dan ontbreekt de term met x of de term met y.

Zijn tweede conclusie is dat bij het vermenigvuldigen van een aantal van deze afstanden de graad van een term in x en y nooit hoger is dan het aantal afstanden dat bij dit product betrokken is.
De gezochte plaats (locus) wordt dus gerepresenteerd door een vergelijking in de twee variabelen x en y. Een ervan kan men een zekere waarde geven, waarna de andere aan de ontstane (bepaalde) vergelijking moet voldoen.
In het bijzonder richt hij zich op de situatie waarin vijf of minder afstanden zijn betrokken. De eis $d_1 d_2 d_3 = a d_4 d_5$ (a is een gegeven lijnstuk) leidt dan tot een vergelijking in x en y, waarin y hoogstens tot de macht drie voorkomt, maar x hoogstens tot de macht twee omdat d_1, de eerste afstand, gelijk is aan y. Door nu voor y willekeurige waarden in te vullen krijgt men steeds een vierkantsvergelijking in x, waarvan de wortels met passer en liniaal te construeren zijn volgens de methode die wij zojuist vermeldden. Hij geeft dus een puntsgewijze constructie van de gezochte plaats.
Deze methode kan ook worden toegepast in het geval van meer dan vijf lijnen indien daaronder een voldoend aantal evenwijdig is aan AB of aan AC (hierbij worden AB en AC uiteraard niet evenwijdig ondersteld). Het kan dan immers gebeuren dat er zoveel termen x (of y) wegvallen dat de resulterende vergelijking in x (of y) van de graad een of twee is en men, door y (of x) een bepaalde waarde te geven, de wortel x (of y) met passer en liniaal kan construeren.
Indien alle lijnen onderling evenwijdig zijn, dan krijgt men al een probleem bij vijf lijnen. Men kan het dan zo inrichten dat y niet voorkomt; de vergelijking in x is dan van de graad drie. Men ging er van uit dat de wortels daarvan niet met passer en liniaal alleen te construeren zijn; eerst in 1837 gaf P.L. Wantzel hiervan het bewijs! In boek II van de *Géométrie* geeft Descartes echter een oplossing van deze vergelijking met behulp van kegelsneden.
Bij niet meer dan negen lijnen (niet alle evenwijdig) krijgt men met de methode van Descartes een vergelijking waarin x hoogstens tot de macht vier voorkomt omdat de eerste afstand gelijk is aan y. Verderop, in boek II, toont Descartes aan dat in dit geval een oplossing door middel van snijding van kegelsneden mogelijk is.
Bij niet meer dan dertien lijnen krijgt men op analoge wijze te maken met een vergelijking waarin x hoogstens tot de graad zes voorkomt. Deze zal hij later oplossen met een 'hogere' kromme, en wel met de 'trident' of 'parabool van Descartes'. Op deze kromme zullen we in Appendix §3 nog terugkomen.

Op dit punt onderbreekt Descartes zijn behandeling van het probleem van Pappus om een beschouwing in te lassen over zijn indeling van vlakke krommen. Zijn nadere uitwerking van het probleem van Pappus, uitlopend in zijn conclusie dat in het geval van drie of vier lijnen de oplossing een kegelsnede is, stelt hij uit tot blz. 324–335 van de *Géométrie*, waarna hij op blz. 335–341 het Pappusprobleem voor vijf lijnen behandelt. In Appendix §2 zullen we nader ingaan op deze beschouwing over vlakke krommen en in Appendix §3 zullen we Descartes' oplossing van het Pappusprobleem voor vijf lijnen weergeven. Nu zullen we eerst Descartes' behandeling van het probleem van Pappus voor vier lijnen voortzetten.

Hierboven werden al de waarden voor *CB*, *CD*, *CF* en *CH* afgeleid (zie ook Figuur 1.5.4).
De eis $CB.CF = CD.CH$
geeft dan

$$y^2(ez^3 - cgz^2) = y(cfglz - dekz^2 - dez^2x - cfgzx + bcgzx) + bcgflx - bcfgx^2.$$

Indien $ez^3 - cgz^2$ negatief is, vermenigvuldigt men links en rechts met -1; verder beschouwt Descartes alleen die waarden van y waarvoor C ligt binnen de hoek DAG.
Na invoering van geschikt gekozen nieuwe coëfficiënten m en n, die afhangen van b, c, d, e, f, g en l, herleidt Descartes de vergelijking tot de gedaante

$$y^2 = 2my - \frac{2nxy}{z} + \frac{bcfglx - bcfglx^2}{ez^3 - cgz^2}.$$

Deze vergelijking heeft tot wortels

$$y = m - \frac{nx}{z} \pm \sqrt{\left(m^2 - \frac{2mnx}{z} + \frac{n^2x^2}{z^2} + \frac{bcfglx - bcfglx^2}{ez^3 - cgz^2}\right)},$$

waarvan Descartes alleen die met het plusteken beschouwt.
Ter vereenvoudiging voert Descartes nog de grootheden o en p in (weer afhankelijk van de reeds genoemde coëfficiënten), waardoor deze wortel overgaat in

$$y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 + ox - \frac{px^2}{m}}.$$

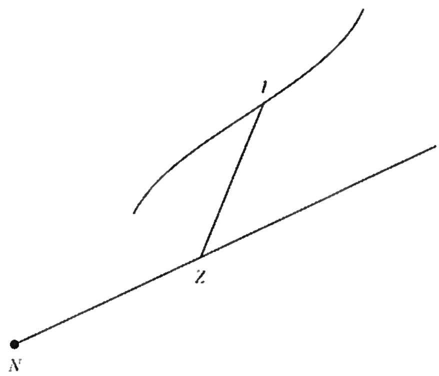
Hierin zijn m, n, z, o en p dus bekende grootheden.
Allereerst merkt Descartes op dat de gezochte plaats een rechte is indien de vorm onder het wortelteken nul of een volkomen kwadraat is. Daarna deelt hij zonder meer mede dat in de andere gevallen de plaats een van de drie kegelsneden is of een cirkel. Voor de constructie van de parabool als oplossing verwijst Descartes naar het betreffende vraagstuk in het eerste boek van de *Conica* van Apollonius. In de overige gevallen geeft hij, zonder nadere toelichting, de voor deze kromme karakteristieke grootheden (middelpunt, latus rectum (parameter), middellijnen, toppen), uitgedrukt in de coëfficiënten van bovenstaande vergelijking. Voor de feitelijke constructie van de krommen daaruit, verwijst hij ook hier naar Apollonius, waarna hij aantoont dat de zo geconstrueerde krommen samenvallen met de krommen die als oplossing van het Pappusprobleem voor de dag kwamen.
Uiteraard zijn hierbij vele gevallen te onderscheiden met betrekking tot de onderlinge ligging van de punten die in de loop van de constructie ontstaan, afhankelijk van de parameters in de vergelijking. Deze worden door Descartes in detail behandeld.
Tenslotte geeft hij een getallenvoorbeeld (zie weer Figuur 1.5.4). In dit voorbeeld geldt voor deze figuur:
$EA = 3$; $AG = 5$; $AB = BR$; $BS = BE/2$; $GB = BT$; $CD = 3CR/2$; $CF = 2CS$; $CH = 2CT/3$; $\angle ABR = 60^\circ$.
De eis $CB.CF = CD.CH$, leidt dan tot de vergelijking

$$y^2 = 2y - xy + 5x - x^2.$$

De plaats blijkt een cirkel te zijn, hetgeen door Descartes zorgvuldig wordt aangetoond aan de hand van zijn voorgaande beschouwingen.
Hiermee besluit Descartes zijn behandeling van het Pappusprobleem voor vier lijnen. In Appendix §3 zullen wij zijn oplossing van het vijflijnenprobleem bespreken.

6. Zoals al eerder werd opgemerkt, ontleende Fermat zijn inspiratie aan het werk van Apollonius. Omstreeks het einde van 1635 voltooide hij een reconstructie van twee verloren boeken van Apollonius, de *Loci Plani*, die, zoals de titel aangeeft, handelen over vlakke plaatsen, over rechten en cirkels dus. Dit bracht hem tot het schrijven van zijn eerste en fundamentele bijdrage aan de analytische meetkunde met als titel *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge* (*Inleiding tot de Vlakke en Ruimtelijke Plaatsen*), een geschrift van slechts acht bladzijden, gevolgd door een appendix die drie pagina's telt.
Reeds vanaf het begin is zijn presentatie duidelijk anders dan die van Descartes. In de eerste plaats al wat betreft de notatie: op dit gebied sluit hij zich aan bij Viète, al komen in de gedrukte editie van 1679 ook cijferexponenten voor, zoals bij Descartes. Maar ook zijn opzet is anders. We zagen al dat Descartes het vierlijnenprobleem van Pappus als uitgangspunt nam en voor de gezochte locus een vergelijking opstelde, die hij aan een nauwkeurig onderzoek onderwierp, met als einddoel de constructie, oftewel de constructieve oplossing, van vergelijkingen.
Fermat ging omgekeerd te werk; ruw gezegd ging hij uit van een vergelijking in twee variabelen en onderzocht aan de hand van de kenmerken van de kegelsneden uit de Oudheid welke kromme hierdoor werd voorgesteld. Op deze wijze benaderde hij het vraagstuk van de loci in zijn meest algemene vorm. Zijn verwijt tegen de wiskundigen uit de Oudheid was namelijk dat zij dit probleem niet algemeen genoeg hadden aangepakt.
Fermat was de eerste die inzag dat een vergelijking in twee onbekenden een kromme representeert. Hij formuleert dit inzicht met de volgende historische zin.
Quoties in ultima aequalitate duae quantitates ignotae reperiuntur, fit locus loco, & terminus alterius ex illis describit lineam rectam, aut curvam, linea recta unica & simplex est, curva infinita, circulus, parabole, hyperbole, ellipsis, &c.
In vertaling:
Telkens wanneer in de uiteindelijke vergelijking twee onbekende grootheden voorkomen, is er sprake van een locus met vaste ligging en het eindpunt van één van beide beschrijft een rechte of kromme lijn; de rechte behoort maar tot één soort en is eenvoudig; van de krommen zijn er oneindig veel soorten: een cirkel, een parabool, een ellips enz.
Het nieuwe is in de eerste plaats dat hij in tegenstelling tot zijn voorgangers, zich niet beperkt tot één vergelijking met één onbekende die daaruit moet worden opgelost, of tot een stelsel met evenveel vergelijkingen als onbekenden (bepaalde vergelijkingen dus) maar dat hij zich richt op onbepaalde vergelijkingen in twee onbekenden.

De twee onbekende grootheden die in de vergelijkingen optreden stelt hij voor als lijnstukken in een plat vlak. Het eerste van beide past hij af langs een vaste halve rechte vanaf het beginpunt daarvan, het tweede zet hij 'naar boven' uit vanaf het eindpunt van de eerste onbekende en onder een vaste (vaak rechte) hoek met de eerder gekozen halve rechte (zie Figuur 1.6.1).



FIGUUR 1.6.1

Het gaat dus om een één-assig coördinatenstelsel. Een y-as komt niet voor, deze vindt men voor het eerst in een postuum geschrift uit 1730 van C. Rabuel (1669–1728). In het vervolg zullen wij spreken van abscis en ordinaat in plaats van eerste en tweede onbekende.
De betreffende kromme wordt dan, bij variabele abscis, gegenereerd door het eindpunt van de bijbehorende ordinaat. Dit eindpunt noemt Fermat *terminus localis*. Meestal beschouwt hij alleen dat deel van de beoogde kromme dat ligt in wat wij het eerste kwadrant zouden noemen. Wij zullen zien dat Jan de Witt zich geheel bij deze werkwijze aansluit.
De *Isagoge* van Fermat heeft één centrale stelling:
...modo neutra quantitatum ignotarum quadratum praetergrediatur, locus erit planus aut solidus, ut ex dicendis clarum fiet.
In vertaling:
...op voorwaarde dat geen van beide onbekenden voorkomt in een hogere dan de tweede macht, zal de plaats vlak of ruimtelijk zijn, zoals uit het volgende duidelijk zal worden.
Ook hier staat ruimtelijke plaats voor parabool, hyperbool of ellips.
Deze stelling wordt bewezen aan de hand van zeven representatieve voorbeelden, waarbij Fermat in eerste instantie uitgaat van vergelijkingen die zo ver mogelijk zijn herleid (ultima aequatio); uit het werk van Viète had hij deze herleiding geleerd.
In feite heeft Fermat met zijn voorbeelden alle standaardvergelijkingen van de eerste en tweede graad onderzocht en daarmee is hij veel systematischer dan Descartes. Daarnaast geeft hij ook voorbeelden van as-translatie en een voorbeeld van wat wij draaiing van de x-as zouden noemen. Zijn geschrift bevat de kern van de analytische meetkunde, zij het in een vaak moeilijk te doorgronden en niet

volledige tekst. Het werk van Jan de Witt, dat hierop en op de *Géométrie* voortbouwt, is hierbij vergeleken een oase van systematiek, helderheid en volledigheid.

In het volgende overzicht is de notatie van Fermat vervangen door onze huidige notatie. Waar Fermat A en E schrijft voor de onbekenden, schrijven wij x en y, de constanten geven wij met kleine letters aan. Een voorbeeld:

$$B^2 - {}^2A^2 \; aequatur \; {}^2A \text{ in } E + E^2$$

schrijven wij als $b^2 - 2x^2 = 2xy + y^2$.

Ook zullen wij haakjes gebruiken. Deze waren onbekend aan Fermat; in zijn verbale omschrijving ontbreken ze uiteraard, waardoor de tekst met veel begrip gelezen moet worden.

De behandelde vergelijkingen zijn de volgende.

i. $dx = by$ als voorbeeld van een rechte.

ii. $xy = c^2$ als voorbeeld van een hyperbool.

Hieraan voegt hij een voorbeeld toe van een as-translatie en wel

$$d^2 + xy = rx + sy.$$

Deze vergelijking omschrijft hij verbaal in een vorm die wij zouden schrijven als

$$(x-s)(r-y) = d^2 - rs,$$

waarbij hij opmerkt dat we nu dezelfde vorm hebben als hierboven indien we x–s en r–y zien als 'opvolgers' van x en y. Hij spreekt niet expliciet over een nieuwe abscis-as.

iii. $x^2 = y^2$; $x^2 : y^2$ = constant; en $(x^2 + y^2) : y^2$ = constant

als voorbeelden van lijnenparen.

iv. $x^2 = dy$ en $y^2 = dx$ als voorbeelden van een parabool.

Hierna herleidt hij $b^2 - x^2 = dy$ tot de gedaante $x^2 = d(r-y)$, waarbij $dr = b^2$, en merkt op dat dit het vorige geval is indien men r–y ziet als opvolger van y.

v. $b^2 - x^2 = y^2$ als voorbeeld van een cirkel, althans indien 'de hoek' recht is. Hierna herleidt hij

$$b^2 - 2dx - x^2 = y^2 + 2ry \quad \text{tot de gedaante}$$

$p^2 - x^2 = y^2$, waarin x en y de plaats hebben ingenomen van x+d en y+r en waarbij geldt

$$p^2 = b^2 + d^2 + r^2.$$

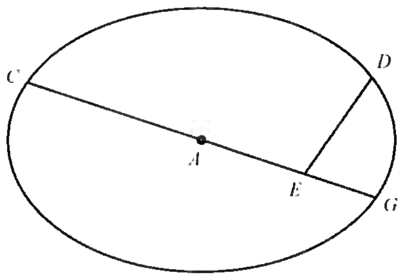
vi. $(b^2 - x^2) : y^2$ = constant, als voorbeeld van een ellips.

Hij voegt hieraan toe dat, indien de constante de waarde 1 heeft èn 'de hoek' recht is, men te maken heeft met een cirkel, maar indien de hoek niet recht is, het toch om een (echte) ellips gaat.

vii $(x^2 - b^2) : y^2 =$ constant, als voorbeeld van een hyperbool.

De bewijsmethode van Fermat is in principe dezelfde als die van Jan de Witt. Met behulp van de coëfficiënten die in de vergelijking optreden, beschrijft hij (verbaal) de beoogde rechte of kromme en toont aan dat abscis en ordinaat van een willekeurig punt daarop voldoen aan de gegeven vergelijking. Het omgekeerde, de compositio of synthese, hier dus het bewijs dat ieder punt waarvan abscis en ordinaat voldoen aan de gegeven vergelijking op de kromme ligt, ontbreekt vaak of wordt afgedaan als vanzelfsprekend: *est facilis compositio.*

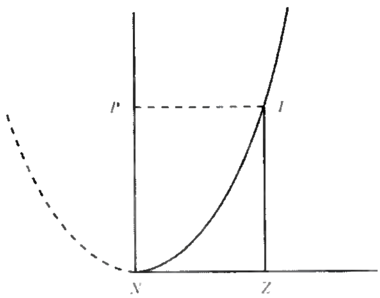
Bij zijn bewijs heeft hij uiteraard een karakteristieke eigenschap van de besproken kromme nodig. Hiervoor beroept hij zich op een van de kenmerken die Apollonius gaf voor de verschillende kegelsneden, en die Fermat bij zijn lezers bekend veronderstelt. Zo gebruikt hij bij de ellips een eigenschap die wij verderop nodig hebben en die de lezer besproken vindt in aantekening [3.5] bij de vertaling. De daarbij behorende figuur is hier opgenomen als Figuur 1.6.2. Hierin is CAG een middellijn van een ellips met middelpunt A. ED verloopt in de daaraan toegevoegde richting. Het bedoelde kenmerk zegt nu dat het punt D dan en slechts dan op de ellips ligt indien de verhouding $DE^2 : CE.EG$ constant is.



FIGUUR 1.6.2

Als eenvoudig voorbeeld van de werkwijze van Fermat kiezen we de vergelijking $x^2 = dy$. In dit geval kiest Fermat een abscis-as met beginpunt N en een bijbehorende ordinaatrichting, hier voorgesteld door ZI (zie Figuur 1.6.3). Vervolgens beschrijft hij verbaal een parabool met N als top, waarvan de middellijn verloopt in de ordinaatrichting, met als daaraan toegevoegde richting de richting van de abscis-as en met d als parameter. Indien PI evenwijdig aan NZ getrokken wordt, dan geldt, op grond van het kenmerk van Apollonius voor een parabool, dat $PI^2 = d.PN$, tenminste als de parabool door I gaat. Hier geldt $PI = NZ = x$ en $NP = ZI = y$, zodat voor een punt op de kromme geldt $x^2 = dy$ en dit is juist de vergelijking waarvan we zijn uitgegaan.

Zonder meer merkt Fermat op dat, omgekeerd, een punt I waarvoor geldt $x^2 = dy$, op de parabool ligt.



FIGUUR 1.6.3

De compositio blijft ook hier achterwege. In het voorbeeld van de cirkel is hij duidelijker over de aard van het punt I; daar zegt hij expliciet dat I op de beoogde cirkel ligt en toont dan aan dat voor de coördinaten x en y geldt

$$b^2 - x^2 = y^2.$$

Naast de hierbovengenoemde voorbeelden van as-translatie geeft Fermat ook een voorbeeld van as-rotatie, echter zonder deze term te noemen. Hij kondigt dit probleem aan met de woorden

Difficillima omnium aequalitatum est quando ita miscentur A^2 & E^2 ut nihilominus homogenea ab A in E afficiantur una cum datis &.

In vertaling:

De moeilijkste van alle vergelijkingen is die waarin x^2 en y^2 zó voorkomen dat er ook nog termen met xy, tezamen met constanten, toegevoegd zijn etc.

Zijn voorbeeld is de vergelijking

$$B^2 -^2 A^2 \text{ } aequatur\text{ } ^2 A \text{ in } E + E^2,$$

voor ons $\quad b^2 - 2x^2 = 2xy + y^2$, oftewel $b^2 - x^2 = (x+y)^2$.

Wij zullen Fermat bij zijn oplossing op de voet volgen, grotendeels met onze notatie.

Allereerst kiest Fermat een abscis-as met N als beginpunt en met de ordinaatrichting loodrecht daarop (zie Figuur 1.6.4). V is een willekeurig punt waarvan de abscis NZ (= x) en ordinaat ZV (= y) voldoen aan bovengenoemde vergelijking. Het gaat nu om de baan van V bij variabele Z.

Om deze te vinden beschrijft Fermat een cirkel met middelpunt N en straal b, die de loodlijn door Z snijdt in I en de abscis-as zelf in M.

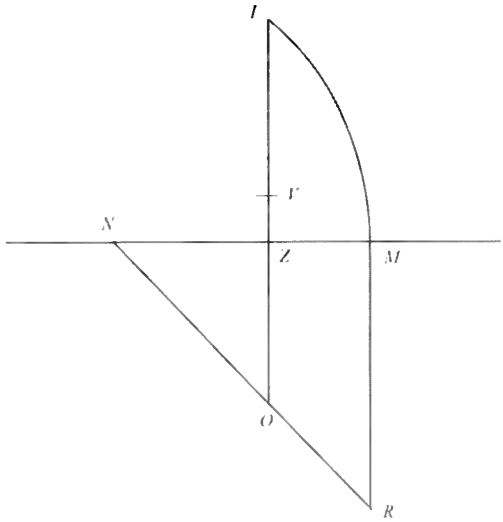
Uit de figuur blijkt dan

$$NM^2 - NZ^2 = ZI^2 = (ZV + VI)^2 \tag{i}$$

en uit de gegeven vergelijking volgt

$$NM^2 - NZ^2 = (ZV + NZ)^2,$$

zodat $\quad VI = NZ$ (= x).



FIGUUR I.6.4

Vervolgens trekt Fermat het lijnstuk MR evenwijdig aan IZ en gelijk aan NM. Het snijpunt van NR met het verlengde van IZ wordt O genoemd. Het is dan duidelijk dat $NZ = ZO$; we zagen al $NZ = VI$, dus $OV = ZI$. Uit (i) volgt dan

$$NM^2 - NZ^2 = OV^2 . \qquad \text{(ii)}$$

Nu merkt Fermat op dat de verhoudingen $NM^2 : NR^2$ en $NZ^2 : NO^2$ 'gegeven' zijn, zonder te vermelden dat zij onderling gelijk zijn, hetgeen hier essentieel is. Dat hun gemeenschappelijke waarde gelijk is aan 1 : 2, gebruikt hij niet.

Uit $\quad NM^2 : NR^2 = NZ^2 : NO^2 \quad = \text{constant},$

Volgt $\quad (NM^2 - NZ^2) : (NR^2 - NO)^2 \quad = \text{constant}.$

Met (ii) geeft dit $\quad OV^2 : (NR^2 - NO^2) \quad = \text{constant}. \qquad$ (iii)

Hieruit en uit het feit dat de rechte NR en de hoek NOZ vastliggen, concludeeert hij zonder meer dat het variabele punt V op een ellips ligt. Kennelijk beroept hij zich op het hierboven genoemde kenmerk van een ellips.

Om de juistheid van zijn bewering in te zien kiezen we NOR als nieuwe abscis-as en de richting van OZ als de daaraan toegevoegde ordinaatrichting. Voor de nieuwe abscis NO en de nieuwe ordinaat OV van V geldt dan

$$OV^2 : (NR + NO).OR = \text{constant}.$$

Op grond van het genoemde kenmerk ligt V op een ellips met middelpunt N, halve middellijn NR, terwijl de daaraan toegevoegde tweede middellijn evenwijdig aan OV en dus aan RM verloopt.

Een en ander is eenvoudig na te rekenen. Indien we stellen $NO = u$ en $OV = v$, dan volgt uit (iii) $\quad v^2 : (2b^2 - u^2) = 1 : 2,$

als we daarbij bedenken dat $NM^2 : NR^2 = 1:2$.

Dit betekent $\dfrac{u^2}{2b^2} + \dfrac{v^2}{b^2} = 1$,

hetgeen juist de vergelijking is van de ellips met middelpunt N en toegevoegde middellijnen met lengte $2b\sqrt{2}$ en $2b$.

Aangezien $u = x\sqrt{2}$ en $v = x + y$, geldt, zoals behoort,

$$b^2 - x^2 = (x+y)^2.$$

Met soortgelijke methoden, zegt Fermat, kunnen alle gevallen waarin de gemengde term xy voorkomt behandeld worden.

Als kroon op dit werk (*coronidis loco*) voegt Fermat de volgende *propositio* toe. Indien (in een plat vlak) willekeurig veel lijnen in ligging gegeven zijn en vanuit een punt onder gegeven hoeken lijnstukken getrokken worden naar deze lijnen, zodanig dat de som van de vierkanten op deze lijnstukken gelijk is aan een gegeven oppervlakte, dan liggen alle punten met deze eigenschap op een kegelsnede.

Men kan dit probleem zien als een variant op het probleem van Pappus (sommen in plaats van producten). Fermat lost dit probleem niet op, maar wel een vereenvoudigde versie ervan. Daarbij zijn twee punten M en N gegeven en gevraagd wordt de locus van de punten I, zodanig dat $IM^2 + IN^2$ een vaste verhouding heeft tot de oppervlakte van driehoek IMN. Deze locus blijkt een cirkel te zijn, waarvan hij de vergelijking opstelt, gevolgd door een daarvan onafhankelijke constructie.

Niet zonder ijdelheid besluit Fermat zijn *Isagoge* met de volgende opmerking.

Indien deze ontdekking voorafgegaan zou zijn aan de twee boeken over vlakke plaatsen, die door mij onlangs gereconstrueerd zijn, dan zouden zeker de bewijzen van de stellingen over loci op elegantere wijze zijn verlopen.

7. Fermat voegde aan zijn *Isagoge* een appendix van drie bladzijden toe, getiteld *APPENDIX AD ISAGOGEM TOPICAM continens solutio problematum solidorum per locos.*

In vertaling:

Aanhangsel bij de inleiding tot de loci, bevattende de oplossing van ruimtelijke problemen door middel van loci.

Hierin past Fermat zijn theorie toe op het oplossen van algebraïsche vergelijkingen in één onbekende, de zogenaamde bepaalde vergelijkingen. Zijn techniek bestaat in het invoeren van een slim gekozen tweede onbekende om daardoor het probleem te verleggen naar het bepalen van het snijpunt van twee vlakke krommen. Hierbij beperkt hij zich tot vergelijkingen van de graad drie of vier en toont dan aan dat men voor de oplossing daarvan kan volstaan met kegelsneden.

Zijn eerste voorbeeld is de vergelijking

$$x^3 + bx^2 = c^2 b.$$

Hier voert hij een nieuwe onbekende y in door te stellen

$$x^3 + bx^2 = c^2 b = bxy,$$

hetgeen leidt tot het stelsel

$$x^2 + bx = by \tag{i}$$

$$c^2 = xy. \tag{ii}$$

Hierdoor kan de onbekende x gevonden worden als de abscis van een snijpunt van de parabool met vergelijking (i) en de hyperbool met vergelijking (ii). Aangezien Fermat slechts één 'kwadrant' beschouwt vindt hij ook slechts één snijpunt, maar hij is ook niet geïnteresseerd in meer. Een nader onderzoek van deze wortel ontbreekt, bijvoorbeeld de vraag of deze wortel inderdaad voldoet en of er misschien meer wortels zijn (zoals $x = 0$). Hij doet deze zaken ook hier af met de woorden *est facilis ab analysi ad synthesim regressus.*

Met een soortgelijke methode, zegt hij, kan men alle derdegraadsvergelijkingen oplosssen.

Het tweede voorbeeld is een vierdegraadsvergelijking:

$$x^4 + b^3x + c^2x^2 = d^4$$

die hij herschrijft als

$$x^4 = d^4 - b^3x - c^2x^2.$$

Door nu beide leden gelijk te stellen aan c^2y^2 ziet men eenvoudig in dat de oplossing gevonden wordt door middel van snijding van de parabool met vergelijking $x^2 = cy$ en de cirkel met vergelijking $c^2y^2 = d^4 - b^3x - c^2x^2$. Hier en elders in deze appendix vermeldt Fermat expliciet dat men uit het werk van Viète wist hoe men in een vierdegraadsvergelijking de term met x^3 kan wegwerken, daarom heeft zijn voorbeeld algemene geldigheid.

Hierna stelt Fermat een oud probleem aan de orde: de bepaling van de grootste (x) van de twee middelevenredigen tussen b en a ($b > a$). Zonder meer veronderstelt hij bekend dat deze voldoet aan de vergelijking $x^3 = b^2d$. Voor de oplossing hiervan stelt hij $x^3 = bxy$ en $b^2d = bxy$. De gezochte x is dus bepaald door een snijpunt van de parabool met vergelijking $x^2 = by$ en de hyperbool met vergelijking $xy = bd$. Hij geeft hierbij een meetkundige toelichting. Ook geeft hij een oplossing met twee parabolen. Daartoe vervangt hij $x^3 = b^2d$ door $x^4 = b^2dx$, waarna hij stelt $x^4 = b^2y^2$ en $b^2dx = b^2y^2$, zodat de oplossing volgt uit 'het' snijpunt van de parabolen met vergelijking $x^2 = by$ en $y^2 = dx$. Hierbij vermeldt hij dat deze methode ook te vinden is bij Eutocius (ca. 480 A.D.) in zijn commentaar op Archimedes.

Met een verwijt aan het adres van Viète geeft Fermat een toepassing van zijn 'elegante methode' op het oplossen van de algemene vierdegraadsvergelijking en wel door middel van snijding van een parabool met een cirkel. Zijn bezwaar tegen de werkwijze van Viète bestaat daarin dat deze bij de oplossing van een vierdegraadsvergelijking een derdegraadsvergelijking, de resolvente, nodig heeft.

Fermat geeft twee karakteristieke voorbeelden:

$$x^4 = c^3x + d^4 \text{ en } x^4 = c^2x^2 - c^3d.$$

Ook hier merkt hij op dat men sinds Viète weet hoe men een eventuele derdegraadsterm kan wegwerken, zodat hij in principe met deze twee typen kan volstaan.
In het eerste geval vult hij het linkerlid aan tot een volledig kwadraat van de gedaante $(x^2 - b^2)^2$ met nader te bepalen b, zodat de vergelijking overgaat in

$$(x^2 - b^2)^2 = c^3x + d^4 + b^4 - 2b^2x^2.$$

Vervolgens stelt hij beide leden op n^2y^2 met $n^2 = 2b^2$, en kiest dan

$$x^2 - b^2 = ny. \qquad \text{(i)}$$

Ook geldt $\quad c^3x + d^4 + b^4 - 2b^2x^2 = n^2y^2, \qquad$ (ii)

zodat de onbekende x bepaald is door een snijpunt van een parabool en een cirkel met vergelijkingen respectievelijk (i) en (ii).
Het tweede geval is iets gecompliceerder. Ook hier vult hij op dezelfde manier beide leden aan tot $(x^2 - b^2)^2 = b^4 - 2b^2x^2 + c^2x^2 - c^3d,$

en stelt beide leden op n^2y^2 met nader te bepalen b en n. Ook nu kiest hij

$$x^2 - b^2 = ny.$$

Er geldt ook $\quad b^4 - 2b^2x^2 + c^2x^2 - c^3d = n^2y^2,$

oftewel $\quad (c^2 - 2b^2)x^2 + b^4 - c^3d = n^2y^2.$

Het is nu duidelijk dat men b zodanig moet kiezen dat $2b^2 > c^2$ en tevens n zodanig dat $n^2 = 2b^2 - c^2$, om een cirkel te krijgen. De keuze $2b^2 < c^2$ zou leiden tot een hyperbool in plaats van de beoogde cirkel, die voor een constructieve oplossing eenvoudiger is. De keuze $2b^2 = c^2$ laat hij buiten beschouwing.
Tot slot laat Fermat zien dat ook het probleem van de twee middelevenredigen op deze manier opgelost kan worden. Hier volgt een schets van zijn methode. Allereerst vervangt hij ook hier $x^3 = b^2d$ door $x^4 = b^2dx$ en gaat, evenals hierboven, over op

$$(x^2 - b^2)^2 = b^4 + b^2dx - 2b^2x^2 = n^2y^2,$$

waarbij $n^2 = 2b^2$, zodat x wordt gevonden als de abscis van het snijpunt van de parabool met vergelijking $x^2 - b^2 = ny$ en de cirkel met vergelijking

$$b^4 + b^2dx - n^2x^2 = n^2y^2,$$

oftewel $\quad b^2 + dx - 2x^2 = 2y^2.$

Zijn conclusie is: wie dit inziet zal tevergeefs proberen het vraagstuk van het mesolabium, de driedeling van de hoek en soortgelijke vraagstukken op te lossen door middel van vlakke hulpmiddelen, d.w.z. door middel van rechten en cirkels.

Hierbij zij opgemerkt dat een mesolabium een apparaat is waarmee men op mechanische wijze de middelevenredige tussen twee lijnstukken kan construeren. Het was een vinding van Eratosthenes (ca. 276– ca. 195 v. Chr.). Zie [63].

8. Het lot van de *Isagoge* van Fermat verschilde in veel opzichten van dat van de *Géométrie* van Descartes.
Fermat leefde geïsoleerd als Raadsheer en Commissaris voor de verzoekschriften bij het stadsparlement in Toulouse, bekleedde daar later hogere ambten, maar begaf zich nooit ver buiten die stad. Zelfs Parijs heeft hij nooit bezocht! Naast zijn ambtelijke functies beoefende hij intensief de wiskunde, maar bleef zich daarin altijd beschouwen als amateur. Zijn contacten met de wiskundige wereld verliepen in hoofdzaak door middel van brieven, waaronder een voorname plaats werd ingenomen door zijn correspondentie met leden van een Parijse kring van wiskundigen onder leiding van Etienne Pascal, de vader van Blaise. Secretaris van dit gezelschap was Père Marin Mersenne, die de omvangrijke correspondentie beheerde en bepaalde wie de juiste man was voor de verschillende onderwerpen.
Via deze kring maakte Fermat in 1637 zijn *Isagoge* (met Appendix) wereldkundig en via deze kring ook kwamen Descartes en Frans van Schooten jr. in het bezit van afschriften daarvan. Fermat stond echter niet toe dat de *Isagoge* in druk zou verschijnen, iets wat gold voor nagenoeg al zijn werk. Hierbij zij opgemerkt dat de gebroeders Elsevier al vóór 1650 plannen hadden om werk van Fermat uit te geven, maar hiertoe is het niet gekomen. Eerst in 1679, veertien jaren na zijn overlijden, bezorgde zijn zoon Clément-Samuel een gedrukte uitgave van zijn wiskundige werken onder de titel *Varia Opera Mathematica D. Petri de Fermat, Senatoris Tolosani*, maar toen was zijn werk al overvleugeld door de *Géométrie* van Descartes en het werk van diens navolgers.

9. Deze *Géométrie*, direct al in 1637 in druk verschenen bij Jan Maire, boekverkoper in Leiden, werd aanvankelijk niet door iedereen gewaardeerd. De oorzaak hiervan was niet alleen de ontoegankelijke stijl van dit werk en de taal, het Frans, waarin het geschreven was, maar ook het feit dat velen de voorkeur bleven geven aan de synthetische methode van de Grieken. Het was dus van belang dat er wiskundigen waren die zorgden voor de verbreiding van de ideeën die neergelegd waren in de *Géométrie*.
Onder hen verdient Frans van Schooten jr. een ereplaats. Hij maakte de *Géométrie* voor alle geleerden toegankelijk door zijn vertaling daarvan in het Latijn, de Lingua Franca van de wetenschapplijke wereld, en door zijn heldere toelichting en duidelijke tekeningen. Voor de geschiedenis van dit werk wordt de lezer verwezen naar de inleiding op de vertaling van *Liber Primus*.

In Frankrijk besteedde G.P. de Roberval (1602–1675) veel aandacht aan de introductie van de methode van Descartes. Hoewel een belangrijk werk van zijn hand over het opstellen van vergelijkingen van loci en het oplossen van vergelijkingen door middel van het snijden van vlakke krommen eerst na zijn dood

verscheen, heeft hij vermoedelijk met zijn colleges aan het Collège de France zijn studenten ingewijd in de analytische meetkunde van Descartes.
In 1639 verscheen een commentaar op de *Géométrie*, de *Notae Breves*, geschreven door Florimond Debeaune (1601–1652). Hierin wordt de *Géométrie* nauwgezet gevolgd, uitvoerig toegelicht en op systematische wijze aangevuld, in het bijzonder waar het gaat om de classificatie van tweedegraadsvergelijkingen in twee variabelen.
Van Schooten jr. nam deze *Notae Breves* op in alle uitgaven van zijn *Geometria à Renato Descartes, etc.* Vanaf de tweede druk daarvan bevat dit werk ook een postume verhandeling van Debeaune over algebraïsche vergelijkingen.
Tot de latere Fransen die overzicht van en uitleg bij de *Géométrie* gaven, behoort onder meer Philippe de la Hire (1640–1718). Na twee verhandelingen over kegelsneden in synthetische stijl, publiceerde hij in 1679 een driedelig werk, waarvan het eerste deel een planimetrische behandeling geeft van kegelsneden als vlakke krommen gedefinieerd door hun brandpuntseigenschappen. Het tweede deel, *Les Lieux Géométriques* verloopt in de stijl van *Liber Secundus* van Jan de Witt, maar het bevat ook een aanloop tot de analytische meetkunde in drie of meer dimensies. Als eerste geeft hij een eenvoudig voorbeeld van een oppervlak als locus, voorgesteld door een tweedegraadsvergelijking in drie variabelen. Fermat en Descartes hadden op deze mogelijkheid slechts gezinspeeld. De eerste systematische behandeling van de analytische meetkunde in drie dimensies is van Antoine Parent (1666–1716), die daarover in 1700 een verhandeling aanbood aan de Académie des Sciences. Het derde deel van dit werk van de la Hire behandelt de constructieve oplossing van algebraïsche vergelijkingen door middel van snijding van vlakke krommen.

John Wallis (1616–1703) was degene die het gedachtegoed van Descartes verspreidde over Groot-Brittannië, echter niet door een vertaling van of commentaar op de *Géométrie*, maar door een eigen werk, de *Tractatus de sectionibus conicis* van 1655. In onze inleiding op *Liber Primus* is al vermeld dat hij de kegelsneden definieerde door hun vergelijkingen. Deze vergelijkingen vielen natuurlijk niet uit de lucht: zij waren ingegeven door de symptomata van Apollonius. Ook in ander opzicht voerde Wallis de algebraïsering verder door: bij hem zijn de coördinaten geen lijnstukken meer, maar getallen. Tevens voerde hij negatieve abscissen en ordinaten in. Verder legde hij in zijn *Arithmetica Infinitorum*, eveneens van 1655, verband tussen de analytische meetkunde en de infinitesimale methoden.
Toch sloeg het werk van Wallis niet bij alle Engelse wiskundigen aan. Velen voelden zich beter thuis bij de synthetische methoden uit de Oudheid; zo was Newton's leermeester, Isaac Barrow (1630–1677), een fel tegenstander van deze nieuwe methode. Dit in grote tegenstelling tot Newton, die zelf grote waardering had voor de *Géométrie*. Ook op het vasteland van Europa maakte Wallis zich vijanden, mede door het opeisen van prioriteiten. Zo zou de *Géométrie* berusten op de *Artis analyticae praxis* uit 1627 van Thomas Harriot (1560–1621) en zou de *Lieux géométriques* van de la Hire plagiaat zijn van de *Tractatus* van Wallis.

Uiteraard is het werk van Jan de Witt vaak gelegd naast de *Tractatus*; in de inleiding op de vertaling van *Liber Primus* wezen we daar al op. Op grond van wat wij al eerder opmerkten kan De Witt niet beïnvloed zijn geweest door Wallis; deze definieerde de kegelsneden immers door hun vergelijkingen, De Witt baseerde zich op een kinematische wijze van voortbrengen en toonde aan de hand daarvan aan welke vergelijking met welke kromme correspondeerde.
Verder zijn bij Wallis de coördinaten getallen, bij de Witt zijn zij nog lijnstukken. Men zou kunnen zeggen dat De Witt in zijn aanpak behoudender was dan Wallis.
Bovendien was het werk van De Witt al in 1649 in concept gereed, zes jaren voor het verschijnen van Wallis' *Tractatus*.
Ook vermelden we nog dat Wallis in 1685 zijn *Treatise of Algebra, both Historical and Practical* publiceerde. Hierin gaf hij aandacht aan het constructief oplossen van vergelijkingen. Men vindt daarin ook de beroemde 'wig van Wallis'.
Tot slot noemen we nog Jacques Ozonam (1640–1717), die in 1687 een werk schreef, geordend volgens de langzamerhand gebruikelijke indeling: eerst (meetkundige) aandacht voor kegelsneden, dan loci en tenslotte constructies van wortels van algebraïsche vergelijkingen.
Tegen die tijd echter was de belangstelling voor de analytische meetkunde, althans voorlopig, sterk verminderd door de opkomst van de differentiaal- en integraalrekening: Leibniz met zijn *Nova Methodus* van 1684 (een geschrift van slechts zes pagina's) en Newton wiens fundamentele bijdragen aan dit nieuwe onderwerp al sinds 1665 in handschrift circuleerden onder vakgenoten voordat ze eerst na 1704 in druk verschenen.

10. Tenslotte zullen we in het kort de structuur van *Liber Secundus* weergeven en de werkwijze van Jan de Witt daarbij schetsen. Een gedetailleerd overzicht van de inhoud vindt de lezer in de Samenvatting.
De kern komt neer op het volgende. Allereerst geeft Jan de Witt van de rechte en van de kegelsneden vergelijkingen in x en y in standaardgedaanten ten opzichte van een door hem gekozen coördinatenstelsel, waarover later. Deze corresponderen met de volgende voor ons bekende vormen.

i. $y = ax + b,\ x = ay + b$ (rechte);

ii. $y^2 = ax + b,\ x^2 = ay + b$ (parabool);

iii. $a^2x^2 - b^2y^2 = 1,\ a^2y^2 - b^2x^2 = 1,\ xy = c$ (hyperbool);

iv. $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$ (ellips).

Het feit dat hij alleen positieve coëfficiënten toelaat en de eis van homogeniteit dwingen hem tot het onderscheiden van meer gevallen en tot formeel andere gedaanten. Men vindt dit terug in de Samenvatting.
Vervolgens toont hij aan dat deze standaardvormen inderdaad de beoogde krommen voorstellen. Hiermee wordt bedoeld dat de coördinaten van elk punt op zo'n kromme voldoen aan de betreffende vergelijking. Het omgekeerde, dat elk punt waarvan de coördinaten aan de vergelijking voldoen, inderdaad op de bijbehorende kromme ligt, wordt hoogst zelden aangetoond.

Na een korte behandeling van de rechte (waaraan anderen nagenoeg geen aandacht schonken) wordt alle aandacht gericht op de kegelsneden. Daarbij staan drie beweringen centraal, die hij elk aankondigt als *Regula Universalis* (Algemene Regel).

De eerste daarvan gaat over de parabool en houdt in dat elke kwadratische vergelijking in twee variabelen –althans indien deze een parabool voorstelt- herleid kan worden tot één van de gedaanten sub ii (uiteraard in de door hem gekozen notatie). Hoe men tevoren ziet of de betrokken vergelijking inderdaad een parabool voorstelt, vermeldt hij niet. Wel geeft hij aan hoe men deze herleiding moet uitvoeren: door het afsplitsen van een kwadraat. Hij illustreert deze methode aan de hand van dertien welgekozen voorbeelden, die in feite neerkomen op draaiing en parallelverschuiving van de abscis-as.

Bij de tweede *Regula Universalis* gaat Jan de Witt ervan uit dat de te onderzoeken tweedegraadsvergelijking een hyperbool, ellips of cirkel voorstelt, ook hier weer zonder te vermelden hoe men dit vooraf kan zien. Zo'n vergelijking, zegt hij, is te herleiden tot één van de gedaanten sub iii en iv. Ook nu geeft hij aan hoe dit moet. Het gaat nu niet alleen om het afsplitsen van een kwadraat, maar ook om een techniek die in feite neerkomt op het 'buiten haakje halen', zonder dat hij haakjes gebruikt. Daartoe voert hij bijvoorbeeld in de uitdrukking $xy + ay$ de nieuwe variabele $v = x + a$ in en substitueert dan $x = v - a$ in de genoemde uitdrukking, waardoor deze overgaat in vy. Deze methode van herleiden demonstreert hij aan de hand van vier tamelijk algemene, maar speciaal voor zijn doel gekozen voorbeelden.

In de derde *Regula Universalis* stelt Jan de Witt de algemene vergelijking van de tweede graad in twee variabelen aan de orde met het doel aan te tonen dat deze steeds te herleiden is tot een van de hierna te noemen gedaanten.

Allereerst herhaalt hij daartoe de hierboven reeds genoemde standaardvormen in x en y, die een rechte of een kegelsnede voorstellen. Vervolgens introduceert hij nieuwe vormen voor kegelsneden door in de sub ii – iv genoemde vormen de variabelen y en x te vervangen door achtereenvolgens z en/of v waarbij geldt

$z = y + px + q$ en tevens $v = x + h$

of $z = y + h$ en tevens $v = x + py + q$.

Uit de hierboven aangegeven vormen in y en x ontstaan dan op voor de hand liggende wijze de bedoelde nieuwe vormen. Zo ontstaan bijvoorbeeld uit

$$a^2x^2 + b^2y^2 = 1, \quad \text{de vormen}$$

$$a^2x^2 + b^2z^2 = 1, \quad a^2v^2 + b^2y^2 = 1 \text{ en } a^2v^2 + b^2z^2 = 1,$$

waarbij z en v de hierboven genoemde betekenis hebben.

Uit $xy = c$ ontstaan $xz = c$, $vy = c$ en $vz = c$, maar in dit geval beperkt Jan de Witt zich tot $z = y + h$ en $v = x + k$.

De bewering van de derde *Regula Universalis* is dat de algemene vergelijking van de tweede graad in twee variabelen te herleiden is tot een van de vormen sub ii–iv of tot een van de daaruit op genoemde wijze ontstane nieuwe vormen. Een overzicht daarvan vindt men in de Samenvatting.

Strikt genomen bewijst Jan de Witt daarna niet wat deze regel beweert. Hij gaat omgekeerd te werk en wel als volgt. Hij beschouwt elk van de nieuwe vormen in z en/of v en toont in detail aan dat deze bij alle genoemde mogelijkheden voor z en v een kegelsnede voorstelt en beschrijft deze verbaal in bijzonderheden. De krommen zelf verschijnen niet op het papier, wel de toppen, middelpunten en assen.
Hij vermeldt echter niet hoe men een algemene tweedegraadsvergelijking tot zo'n gedaante kan herleiden, maar hij laat het bij de opmerking *Methodo jam explicata*, dat wil zeggen 'op de manier die reeds uiteengezet is'. Hierbij doelt hij kennelijk op de vele uitgewerkte voorbeelden, waarin verschillende manieren van herleiden gedemonstreerd zijn. Zo laat onder meer het voorbeeld op blz. [283] duidelijk de bedoelde techniek zien. De derde *Regula Universalis* wordt dan ook niet gevolgd door enig voorbeeld.

Bij zijn opzet gaat Jan de Witt, evenals Fermat, uit van een gegeven lineaire of kwadratische vergelijking in twee variabelen en bewijst daarvan dat deze één van de beoogde krommen voorstelt, in de betekenis die hierboven vermeld is. Evenals Fermat bedient hij zich daarbij van een één-assig coördinatenstelsel. In paragraaf 6 van deze Inleiding is deze methode beschreven (zie ook Figuur 1.6.1). Jan de Witt zet de coördinaten in dezelfde richting uit als Fermat, waardoor ook hij zich beperkt tot het 'eerste kwadrant'. De Witt gebruikt daarbij een vaste formulering, die hij steeds weer herhaalt:
'Laat het vaste beginpunt van x het punt A zijn en laat aangenomen worden dat deze x zich langs de rechte AB onbeperkt uitstrekt en laat de gegeven of aangenomen hoek gelijk zijn aan de hoek ABC'.
Het woord 'onbeperkt' eist een verklaring. De Latijnse tekst geeft *indefinite*, waaarvoor men ook 'onbegrensd' of 'onbepaald' kan lezen. 'Onbegrensd' zou verwarring kunnen wekken. De grootheid x blijft, evenals y, een eindige grootheid, deze stellen immers lijnstukken voor. De lengte daarvan mag men willekeurig aannemen, zonder beperking, maar deze blijft eindig. Om ieder misverstand weg te nemen is als vertaling gekozen 'onbeperkt', soms ook 'onbepaald', of 'willekeurig'.
Bij het bewijs dat een gegeven vergelijking een zekere kromme voorstelt (in de reeds genoemde betekenis), gaat De Witt op een vaste manier te werk. Met behulp van de coëfficiënten die in de vergelijking voorkomen, beschrijft hij verbaal de kromme die hem voor ogen staat. De grootheden die deze kromme bepalen, zoals bijvoorbeeld parameter, top, middellijn en dergelijke, vallen daarbij uit de lucht, maar waren door hem op slimme wijze voorzien. Dit gedeelte van het bewijs noemt hij de *determinatio* of ook wel de *descriptio*. Daarna neemt hij op deze kromme een willekeurig punt met abscis x en ordinaat y. Met behulp van de meetkundige kenmerken die hij in *Liber Primus* heeft opgesteld voor de rechte en elk van de kegelsneden, toont hij vervolgens aan dat de coördinaten van het door hem gekozen punt inderdaad voldoen aan de gegeven vergelijking. Dit gedeelte van het bewijs noemt hij vanaf blz. [260] expliciet de *demonstratio*.
De weg terug, de *compositio* of *synthesis*, dat wil zeggen het bewijs dat ieder punt waarvan de coördinaten aan de vergelijking voldoen, ook inderdaad op de aangegeven kromme ligt, laat hij, zoals gezegd, meestal achterwege. Daardoor mist

hij ook de tweede tak van de hyperbool. Opvallend is dat hij geen aandacht schenkt aan ontaardingen.

Evenals *Liber Primus*, is ook *Liber Secundus* een strak geordend geheel. Centraal staan de genoemde *Regulae Universales*, geadstrueerd door veertien *Theoremata*, vele *Exempla* en drie *Problemata*.
Een *Theorema* bestaat uit een *propositio* eventueel gevolgd door een aantal *corollaria*. In de propositio wordt een stelling geformuleerd en bewezen; de corollaria geven gevolgtrekkingen uit de propositio.
Een *Problema* bestaat eveneens uit een *propositio* en eventuele *corollaria*. Hier wordt in de propositio een constructieprobleem gesteld en opgelost; de corollaria geven nadere eigenschappen van de geconstrueerde figuur.
Opvallend is dat de propositiones in het gehele werk doorgenummerd worden, of zij nu bij een *Theorema* of bij een *Problema* behoren.

Ook in *Liber Secundus* heeft Jan de Witt vier soorten kanttekeningen aan de tekst toegevoegd. In drie van deze vier gevallen verwijst hij hiernaar door middel van superscript cijfers in de tekst. Deze kanttekeningen zijn in de vertaling opgenomen als voetnoten. Het betreft hier:
i. Verwijzingen naar de *Elementa* van Euclides. Deze hebben hetzelfde standaardkarakter als in *Liber Primus*. Zo verwijst ‘per 16 sexti’ naar stelling 16 van het zesde boek van de *Elementa*. In de voetnoot bij de vertaling wordt dit weergegeven als ‘VI, 16’.
ii. Verwijzingen naar *Elementa Curvarum Linearum* zelf. Een voorbeeld: ‘per 1 primi hujus’ verwijst naar propositio 1 van *Liber Primus*. Om het terugzoeken te vergemakkelijken is het nummer van de betreffende bladzijde van de Latijnse tekst, toegevoegd. In de voetnoot leest men dan ‘prop. 1, Lib.I, blz. [162]’. Zo vindt men ook ‘per 3 Corol. 6 primi hujus’ terug als ‘gevolg 3 van prop.6, Lib.I, blz. [191]’.
iii. Toelichtingen op de bewijzen die in de tekst voorkomen. Ook hiervan een voorbeeld (blz. [302]): de kanttekening ‘quippe quadr. ex *HO* aequatur *GAF* rectang. ex hypoth.’ luidt in de voetnoot: ‘omdat het vierkant op *HO* gelijk is aan de rechthoek *GAF* op grond van de veronderstelling’.
Daarnaast zijn er ook kanttekeningen waarnaar niet met een cijfer wordt verwezen. In het algemeen gaat het dan om de aanduiding van een speciaal geval, zoals bijvoorbeeld op blz. [318]: ‘Casus 1^{mus}, cùm Locus est Hyperbola’. In de vertaling is zo’n kanttekening opgenomen als opschrift van een tekstonderdeel, hier dus als ‘Het eerste geval waarin de plaats een hyperbool is’.
In één geval (blz. [305]) betreft het de verklaring van een door Jan de Witt gebruikt symbool; hieraan is aantekening [4.2] gewijd.

2

Samenvatting

In deze samenvatting worden achtereenvolgens de stellingen en hun gevolgen (*corollaria*) weergegeven in de vorm van een parafrase met gebruikmaking van onze huidige notatie.

De essentie van de beweringen is echter behouden. Voor de bewijzen wordt verwezen naar de tekst, de vertaling en de aantekeningen. De bedoeling van deze samenvatting is slechts de lezer een systematisch overzicht van de inhoud te verschaffen.
Voor een overzicht van de structuur van *Liber Secundus* en de werkwijze van Jan de Witt daarbij, wordt de lezer verwezen naar paragraaf 10 van de Inleiding.

Hoofdstuk I

In dit hoofdstuk onderzoekt Jan de Witt de vergelijkingen van de eerste graad in x en y. Hierbij worden x en y ten duidelijkste opgevat als lijnstukken, zoals o.a. blijkt uit de formulering 'het beginpunt van de ene grootheid'. De voorkomende coëfficiënten zijn dienovereenkomstig steeds positief.
De krommen die door de vergelijkingen worden voorgesteld, worden, evenals in *Liber Primus*, 'plaatsen' genoemd.
In het gehele werk wordt wel een x-as gebruikt, maar geen y-as. Deze x-as wordt als volgt geïntroduceerd: Jan de Witt neemt een vast punt A op een willekeurig gekozen rechte en kiest dit punt als het vaste en onbeweeglijke beginpunt van de variabele x die zich onbeperkt kan uitstrekken langs deze vaste rechte door A (steeds naar rechts). Een gegeven x wordt dan voorgesteld door een lijnstuk, bijvoorbeeld AE op deze rechte. Vanuit het eindpunt van deze x wordt dan onder een vaste, gegeven of gekozen, hoek het lijnstuk y 'naar boven' uitgezet (zie ED in Figuur 2.1). Wij zouden zeggen dat hij zich beperkt tot het eerste kwadrant. Zoals al in de inleiding werd opgemerkt, is de y-as echter pas tegen het einde van de 17e eeuw ingevoerd door Claude Rabuel (1669–1728).

Hoofdstuk I bestaat uit de volgende stellingen:

Stelling I. *Propositie* I.

Indien de vergelijking luidt $y = \dfrac{bx}{a}$, dan is de gezochte plaats een rechte lijn.

Stelling II. *Propositie* 2.

Indien de vergelijking luidt $y = \frac{bx}{a} + c$, dan is de gezochte plaats een rechte lijn.

Stelling III. *Propositie* 3.

Indien de vergelijking luidt $y = \frac{bx}{a} - c$, dan is de gezochte plaats een rechte lijn.

Stelling IV. *Propositie* 4.

Indien de vergelijking luidt $y = -\frac{bx}{a} + c$, dan is de gezochte plaats een rechte lijn.

Stelling V. *Propositie* 5.
Indien de vergelijking luidt $y = c$, dan is de gezochte plaats een rechte lijn.

Stelling VI. *Propositie* 6.
Indien de vergelijking luidt $x = c$, dan is de gezochte plaats een rechte lijn.

Hoofdstuk II

In dit hoofdstuk worden de volgende vergelijkingen aan de orde gesteld:

I.	$y^2 = ax$	of omgekeerd	$ay = x^2$
II.	$y^2 = ax + b^2$	of omgekeerd	$ay + b^2 = x^2$
III.	$y^2 = ax - b^2$	of omgekeerd	$ay - b^2 = x^2$
IV.	$y^2 = -ax + b^2$	of omgekeerd	$b^2 - ay = x^2$.

Allereerst worden de volgende stellingen bewezen:

Stelling VII. *Propositie* 7.
Indien de vergelijking luidt $y^2 = ax$, of omgekeerd $ay = x^2$, dan is de gezochte plaats een parabool.
Dit volgt direct uit stelling I van *Liber Primus* (blz. [162]), waar deze eigenschap als kenmerk (*symptoma*) van de parabool is afgeleid.

Stelling VIII. *Propositie* 8.
Indien de vergelijking luidt $y^2 = ax + b^2$, of omgekeerd $ay + b^2 = x^2$, dan is de gezochte plaats een parabool.

Stelling IX. *Propositie* 9.
Indien de vergelijking luidt $y^2 = ax - b^2$, of omgekeerd $ay - b^2 = x^2$, dan is de gezochte plaats een parabool.

Stelling X. *Propositie* 10.
Indien de vergelijking luidt $y^2 = -ax + b^2$, of omgekeerd $b^2 - ay = x^2$, dan is de gezochte plaats een parabool.

De 'omgekeerden' (*conversim*) van de stellingen VII t/m X worden afgeleid door in de figuren en in de redeneringen de rollen van x en y te verwisselen.
Ook hier geldt dat slechts die delen van de krommen in beschouwing worden genomen die rechts van A en tevens boven de x-as liggen.

Algemene Regel en een manier om alle vergelijkingen die voortkomen uit een daartoe leidende berekening –in het geval waarin de gezochte plaats een parabool is– te herleiden tot één van de vier gevallen die reeds uiteengezet zijn, met behulp van de –eveneens vier– voorafgaande stellingen.

Deze Algemene Regel geeft een methode om de betreffende vergelijking – in het geval dat deze een parabool voorstelt – te herleiden tot een van de gedaanten van Stelling VII, VIII, IX of X. Hierbij vermeldt Jan de Witt niet hoe men van tevoren vaststelt of de vergelijking inderdaad een parabool voorstelt.
Deze methode komt in feite neer op het afsplitsen van een kwadraat: indien naast de term met x^2, de termen $\pm\, 2ax$, $\pm\, 2xy$, $\pm\, 2axy$ voorkomen, dan voert men een nieuwe variabele z in, met

$$z = x \pm a, \quad \text{resp. } z = x \pm y \text{ of } z = x \pm ay.$$

Uiteraard is het voorteken hierbij juist het voorteken van de betreffende termen indien zij met x^2 aan dezelfde kant van het gelijkteken staan. Hetzelfde geldt, mutatis mutandis, indien het y^2 betreft.
De voorbeelden aan de hand waarvan Jan de Witt zijn methode toelicht, zijn uiteraard zo gekozen dat het om parabolen gaat.

Voorbeelden van de herleiding van vergelijkingen tot de gedaante van Stelling VII.

1. Herleiding van de vergelijking

$$y^2 + 2ay = bx - a^2$$

tot de gedaante $z^2 = bx$,
waarbij $z = y + a$.
Deze herleiding wordt gevolgd door de constructie van de bijbehorende parabool (*determinatio*, ook wel *descriptio*) en het bewijs dat de coördinaten van de punten daarop inderdaad aan de vergelijking voldoen (*demonstratio*). In het vervolg zullen wij naar deze gang van zaken vaak kortheidshalve verwijzen met *determinatio* en *demonstratio*.

2. Herleiding van de vergelijking

$$y^2 - 2ay = bx - a^2$$

tot de gedaante $z^2 = bx$,
waarbij $z = y - a$.
Voor de rest van het bewijs wordt verwezen naar het vorige voorbeeld.

3. Herleiding van de vergelijking

$$by - a^2 = x^2 + 2ax$$

tot de gedaante $by = v^2$,
waarbij $v = x + a$.
Beschrijving van de constructie van deze parabool in het platte vlak, gevolgd door de demonstratio.

4. Mededeling dat de vergelijking

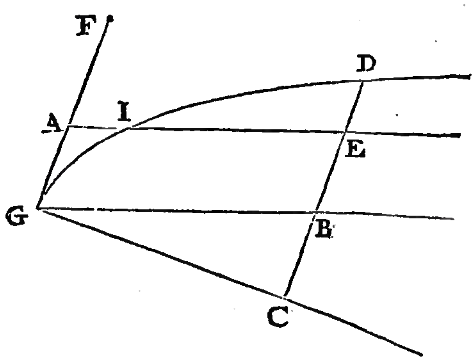
$$by - a^2 = x^2 - 2ax$$

analoog behandeld kan worden.

5. Herleiding van de vergelijking

$$y^2 + \frac{2bxy}{a} + 2cy = bx - \frac{b^2x^2}{a^2} - c^2$$

tot de gedaante $z^2 = dx$,
waarbij $z = y + \frac{bx}{a} + c$ en $d = \frac{2bc}{a} + b$.



FIGUUR 2.1

Bij de constructie van deze parabool (Figuur 2.1), wordt het punt $G(0, -c)$ als top gekozen. De as GC gaat door G en verloopt zo dat $GB : BC = a : b$ (BC verloopt in de ordinaatrichting).
Ook hier volgt een *demonstratio*, waarbij Jan de Witt opmerkt dat, indien de kromme de x-as niet zou snijden, de oplossing wel een parabool zou zijn, maar dat

deze niet op 'bevredigende wijze' te construeren zou zijn (*quod nulla tamen quaestioni satisfaciens describi possit*). Hij bedoelt hiermee: niet boven de x-as zou liggen. Zie verder de bijbehorende aantekening bij de vertaling.
Overigens is dit voorbeeld wel zeer speciaal gekozen.

6. De ligging van de kromme, gedefinieerd door de vergelijking

$$y^2 - \frac{2bxy}{a} - 2cy = bx - \frac{b^2x^2}{a^2} - c^2$$

wordt vergeleken met die van de parabool die onder 5 is besproken.

7. Herleiding van de vergelijking

$$by - \frac{b^2y^2}{a^2} - c^2 = x^2 + \frac{2bxy}{a} + 2cx$$

tot de gedaante $dy = v^2$,

waarbij $v = x + \frac{by}{a} + c$ en $d = \frac{2bc}{a} + b$.

Opgemerkt wordt dat deze situatie het 'omgekeerde' is van die in voorbeeld 5. Ook hier volgt een volledige *determinatio* en *demonstratio*.

Voorbeelden van de herleiding van vergelijkingen tot de gedaante van Stelling VIII.

1. Herleiding van de vergelijking

$$y^2 - \frac{bxy}{a} = -\frac{b^2x^2}{4a^2} + bx + d^2$$

tot de gedaante $z^2 = bx + d^2$,

waarbij $z = y - \frac{bx}{2a}$.

Beschrijving (*descriptio*) van de constructie van deze parabool in het platte vlak, met het bewijs (*demonstratio*) dat de zo beschreven kromme inderdaad de parabool is die door de vergelijking wordt bepaald. Ook wordt gewezen op de 'omgekeerde' parabool, dat wil zeggen die, waarbij in de vergelijking de variabelen x en y onderling verwisseld zijn.

2. Herleiding van de vergelijking

$$\frac{bcy}{a} + by - \frac{b^2y^2}{a^2} + \frac{c^2}{4} = x^2 + \frac{2byx}{a} - cx$$

tot de gedaante $by + \frac{c^2}{2} = v^2$, waarbij $v = x + \dfrac{by}{a} - \dfrac{c}{2}$.

Beschrijving van de constructie van deze parabool in het platte vlak, met het bewijs dat de zo beschreven kromme inderdaad de parabool is die door de vergelijking wordt bepaald.

Voorbeeld van de herleiding van vergelijkingen tot de gedaante van Stelling IX.

Herleiding van de vergelijking

$$y^2 + \frac{bxy}{a} - cy = ax - \frac{b^2x^2}{4a^2} - c^2$$

tot de gedaante $z^2 = dx - 3\dfrac{c^2}{4}$,

waarbij $z = y + \dfrac{bx}{2a} - \dfrac{c}{2}$ en $d = a - \dfrac{bc}{2a}$.

Beschrijving van de constructie van deze parabool in het platte vlak, met het bewijs dat de zo beschreven kromme inderdaad de parabool is die door de vergelijking wordt bepaald.

Voorbeelden van de herleiding van vergelijkingen tot de gedaante van Stelling X.

1. Herleiding van de vergelijking

$$ay - y^2 = bx$$

tot de gedaante $z^2 = \dfrac{a^2}{4} - bx$,

waarbij $z = y - \dfrac{a}{2}$.

Beschrijving van de constructie van deze parabool in het platte vlak, met het bewijs dat de zo beschreven kromme inderdaad de parabool is die door de vergelijking wordt bepaald.

2. Herleiding van de vergelijking

$$\frac{b^2y^2}{a^2} + dy - c^2 = \frac{2byx}{a} - x^2$$

tot de gedaante $c^2 - dy = v^2$,

waarbij $v = x - \dfrac{by}{a}$.

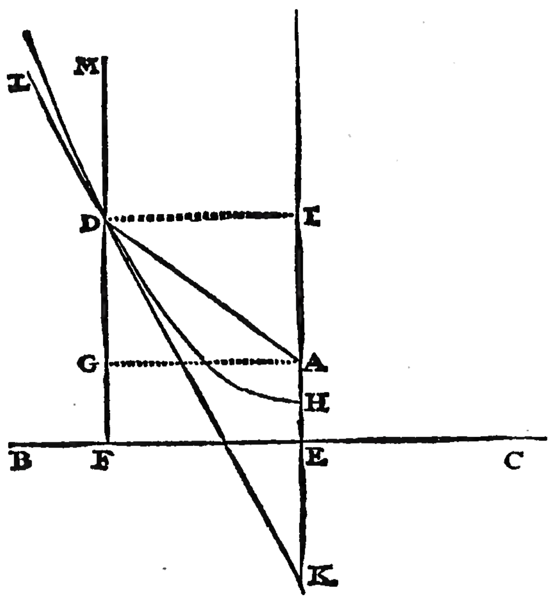
Beschrijving van de constructie van deze parabool in het platte vlak, met het bewijs dat de zo beschreven kromme inderdaad de parabool is die door de vergelijking wordt bepaald. Ook wordt nog een andere wijze gegeven om de bijbehorende middellijn en de rechte zijde te bepalen.

Vraagstuk I. *Propositie* 11.
Bij een gegeven punt en een gegeven rechte de plaats te bepalen van alle punten, gelegen in het vlak door dit gegeven punt en deze gegeven rechte, zodanig dat de afstanden van elk van deze punten tot de gegeven rechte en het gegeven punt gelijk zijn. Deze plaats ook te construeren.

Deze plaats blijkt een parabool te zijn. Hier wordt de term brandpunt (*focus*) of navelpunt (*umbilicus*) ingevoerd. Het begrip 'richtlijn' wordt niet geïntroduceerd.

Gevolg 1. De voerstraal van een punt *D* op een parabool (dat is het lijnstuk dat *D* met het brandpunt verbindt) is gelijk aan het lijnstuk tussen de projectie van *D* op de as en de top, vermeerderd met het vierde deel van de parameter. Zie Figuur 2.2.

Gevolg 2. De hoek tussen de voerstraal van een punt op een parabool en de raaklijn aan deze parabool in dit punt, is gelijk aan de hoek die deze raaklijn maakt met de as. Deze raaklijn halveert dus de hoek tussen de voerstraal in dit punt en de lijn door dit punt evenwijdig aan de as.



FIGUUR 2.2

Hoofdstuk III

In dit hoofdstuk worden de volgende vergelijkingen aan de orde gesteld:

I $yx = f^2$

II $\dfrac{ly^2}{g} = x^2 - f^2$

III $y^2 - f^2 = \dfrac{lx^2}{g}$

IV $\dfrac{ly^2}{g} = f^2 - x^2$.

Stelling XI. *Propositie* 12.
Indien de vergelijking luidt $yx = f^2$, dan is de gezochte plaats een hyperbool.
Het bewijs hiervan berust op de kenmerkende eigenschap van een hyperbool, zoals die uit de definitie van een hyperbool is afgeleid in *Liber Primus*, Stelling III (blz. [180]).
Wij zouden zeggen dat de asymptoten zijn aangenomen als 'coördinaatassen'. In de taal van die tijd zou men zeggen dat het snijpunt van de asymptoten de oorsprong is van de abscis-as, die langs een asymptoot valt, terwijl de hoek tussen de asymptoten de 'gegeven of aangenomen' hoek is.

Stelling XII. *Propositie* 13.

Indien de vergelijking luidt $\dfrac{ly^2}{g} = x^2 - f^2$, dan is de gezochte plaats een hyperbool.

Het bewijs hiervan berust op Stelling IX van *Liber Primus* (blz. [196]). Door middel van deze eigenschap van de hyperbool identificeerde Jan de Witt 'zijn' hyperbool met de hyperbool van de Oude Grieken in het bijzonder die van Apollonius.

Stelling XIII. *Propositie* 14.

Indien de vergelijking luidt $y^2 - f^2 = \dfrac{lx^2}{g}$, dan is de gezochte plaats een hyperbool.

Het bewijs en de bijbehorende constructie verlopen analoog aan de redeneringen bij stelling XII. In feite worden hier de rollen van x en y verwisseld.

Stelling XIV. *Propositie* 15.

Indien de vergelijking luidt $\dfrac{ly^2}{g} = f^2 - x^2$, dan is de gezochte plaats een ellips (c.q. een cirkel).

Het bewijs van deze stelling berust direct op de kenmerkende eigenschap die Jan de Witt in *Liber Primus*, Stelling XII (blz. [205]), afleidt uit zijn definitie van de ellips. Uiteraard geldt dat de kromme een cirkel voorstelt indien $l = g$ en tevens de 'gegeven of aangenomen hoek' recht is.

Algemene Regel en een manier om alle vergelijkingen die voortkomen uit een daartoe leidende berekening –in het geval waarin de gezochte plaats een hyperbool, een ellips of een cirkelomtrek is– te herleiden tot een van de vier gevallen die reeds uiteengezet zijn, met behulp van de –eveneens vier– voorafgaande stellingen.

Deze Algemene Regel stelt (zonder bewijs) dat een vergelijking van de tweede graad waarin voorkomen een of meer van de de termen xy, x^2, y^2, ax en by, te herleiden is tot de gedaante van een van de stellingen XI t/m XIV, althans indien deze vergelijking een hyperbool, ellips of cirkel voorstelt.
De 'manier' komt daarop neer dat men de combinaties

$$xy \pm ay \text{ en } xy \pm ax$$

vervangt door vy, resp. vx, waarbij $v = x \pm a$, resp. $v = y \pm a$,
en in de combinaties

$$x^2 \pm 2\,ax, \text{ resp. } y^2 \pm 2\,ay$$

een kwadraat afsplitst, dat wil zeggen als nieuwe variabelen invoert

$$v = x \pm a, \text{ resp. } v = y \pm a.$$

Doordat Jan de Witt nog niet over een notatie met behulp van haakjes beschikte, verlopen de berekeningen in onze ogen vrij omslachtig.
Voor meer details zij verwezen naar de aantekening bij de vertaling van de betreffende passage.

Voorbeeld van de herleiding van vergelijkingen tot de gedaante van Stelling XI.

Herleiding van de vergelijking

$$yx - cx + hy = e^2$$

tot de gedaante $zv = f^2$,
waarbij $z = y - c$ en $v = x + h$ en $f^2 = e^2 - ch$.
Beschrijving van de constructie van deze hyperbool in het platte vlak, met het bewijs dat de zo beschreven kromme inderdaad de hyperbool is die door de vergelijking wordt bepaald.

Voorbeelden van de herleiding van vergelijkingen tot de gedaante van Stelling XII en XIII.

1. Herleiding van de vergelijking

$$y^2 + \frac{2bxy}{a} + 2cy = \frac{fx^2}{a} + ex + d^2.$$

Allereerst wordt deze vergelijking herleid tot

$$\frac{a^2z^2}{fa+b^2} = v^2 - h^2 + \frac{a^2d^2 + a^2c^2}{fa+b^2},$$

waarbij $\quad z = y + \dfrac{bx}{a} + c\,,\quad v = x + \dfrac{a^2e + 2abc}{2fa + 2b^2}$

en $\quad 2h = \dfrac{a^2e + 2abc}{fa+b^2}\,.$

Nu worden twee gevallen onderscheiden:

i. $\quad h^2 > \dfrac{a^2d^2 + a^2c^2}{fa+b^2},$

ii. $\quad h^2 < \dfrac{a^2d^2 + a^2c^2}{fa+b^2}.$

In het eerste geval blijkt de kromme een hyperbool te zijn die de holle zijde naar de x-as keert. In het tweede geval blijkt de kromme een hyperbool te zijn die de bolle zijde naar de x-as keert.
Van deze krommen wordt een nauwkeurige *descriptio* met een volledige *demonstratio* gegeven.

2. Herleiding van de vergelijking

$$x^2 + 2ay = \frac{2bxy}{a}$$

tot de gedaante $\quad z^2 - \dfrac{a^6}{b^4} = \dfrac{a^2v^2}{b^2}$, waarbij $z = y - \dfrac{a^3}{b^2}$ en $v = x - \dfrac{by}{a}$.

Ook hier volgt een nauwkeurige *determinatio* en *demonstratio.*

Vraagstuk II. *Propositie* 16.

Bij twee gegeven punten een derde punt te vinden met de eigenschap dat de lijnstukken die van daaruit getrokken zijn naar de twee gegeven punten een gegeven afstand verschillen en de plaats te bepalen en te beschrijven waarop het gezochte punt ligt.

Deze plaats blijkt een hyperbool te zijn, hetgeen geconstateerd wordt aan de hand van de afgeleide vergelijking, die valt onder Stelling XII, maar wat ook geverifieerd wordt aan de hand van de definitie zoals die volgt uit de 'aanpassingsproblemen' uit de Griekse Oudheid. Ook worden de twee gegeven punten als brandpunten aangewezen.
Jan de Witt neemt stilzwijgend aan dat het hier gaat om een oplossing in het platte vlak.

Gevolg 1.
Indien men op een hyperbool een willekeurig punt aanneemt en dat verbindt met elk van beide brandpunten, dan is het verschil van de verbindende lijnstukken gelijk aan de transversale as.

Gevolg 2.
Indien men op een hyperbool een willekeurig punt aanneemt en dat verbindt met elk van beide brandpunten, dan raakt de lijn die de hoek tussen de verbindende lijnstukken halveert, aan de hyperbool in het gekozen punt.
Omgekeerd halveert de raaklijn in dit punt de hoek tussen de lijnstukken die dit punt verbinden met elk van beide brandpunten.

Voorbeeld van de herleiding van vergelijkingen tot de gedaante van Stelling XIV.

Herleiding van de vergelijking

$$y^2 + \frac{2bxy}{a} - 2cy = -x^2 + dx + k^2$$

tot de gedaante

$$z^2 = \frac{-a^2x^2 + b^2x^2}{a^2} + \frac{dax - 2bcx}{a} + c^2 + k^2,$$

waarbij $z = y - c + \dfrac{bx}{a}$.

Deze vergelijking wordt verder herleid tot

$$\frac{a^2z^2}{a^2 - b^2} = -v^2 + h^2 + \frac{c^2a^2 + k^2a^2}{a^2 - b^2},$$

waarbij $2h = \dfrac{da^2 - 2bca}{a^2 - b^2}$

en $v = x - h$.

Uitgaande van de onderstelling dat $a^2 > b^2$, wordt deze vergelijking nog verder gereduceerd tot

$$\frac{lz^2}{g} = f^2 - v^2,$$

waarbij $$\frac{l}{g} = \frac{a^2}{a^2 - b^2}$$

en $$f^2 = h^2 + \frac{c^2a^2 + k^2a^2}{a^2 - b^2}.$$

Nu is de vergelijking herleid tot de gedaante van Stelling XIV en wordt de conclusie getrokken dat het hier gaat om een ellips of een cirkel.
Ook nu volgt een nauwkeurige *descriptio* en de bijbehorende *demonstratio.*
Over het geval $a^2 < b^2$ wordt niet gesproken. Dit zou ook niet leiden tot een voorbeeld van Stelling XIV.

Vraagstuk III. *Propositie* 17.

Bij twee gegeven punten een derde punt te vinden met de eigenschap dat de lijnstukken die van daaruit getrokken zijn naar de twee gegeven punten, tezamen een gegeven lengte hebben, en de plaats te bepalen en te beschrijven waarop het gezochte punt ligt.

Deze plaats blijkt een ellips te zijn, hetgeen geconstateerd wordt aan de hand van de afgeleide vergelijking, die valt onder Stelling XIV, maar wat ook geverifieerd wordt aan de hand van de definitie van ellips zoals die volgt uit de 'aanpassings-problemen' uit de Griekse Oudheid. Ook hier worden de gegeven punten als brandpunten aangewezen. Jan de Witt neemt ook hier stilzwijgend aan dat het gaat om een oplossing in het platte vlak.

Gevolg 1.
De lijnstukken die vanuit een willekeurig punt op een ellips getrokken worden naar elk van beide brandpunten zijn tezamen even lang als de transversale as.

Gevolg 2.
Indien men vanuit een willekeurig punt op een ellips naar elk van beide brandpunten rechten trekt en door ditzelfde punt een andere lijn getrokken wordt die gelijke hoeken maakt met elk van beide getrokken lijnen, dan zal deze de kromme in het genoemde punt raken.
Omgekeerd maakt de raaklijn in dit punt gelijke hoeken met de lijnstukken die dit punt met de brandpunten verbinden.

Hoofdstuk IV

Algemene regel om willekeurige vlakke en ruimtelijke plaatsen te vinden en te bepalen.

In dit hoofdstuk wordt een classificatie ondernomen van de algemene vergelijking in de variabelen x en y, met graad maximaal twee en wordt de bij elke vergelijking behorende rechte, resp. kegelsnede onderzocht.
Voor de begrippen 'vlakke' en 'ruimtelijke' plaatsen zie men de Inleiding.

Jan de Witt onderscheidt de volgende gevallen:

1. $y = \dfrac{bx}{a}$, of $y = x$, indien $a = b$.

$y = \dfrac{bx}{a} \pm c$, of $y = c - \dfrac{bx}{a}$.

Hierbij merkt hij op dat eventueel een van beide grootheden x of y kan ontbreken. Deze afzonderlijke opmerking is wel nodig omdat a en b bekende *positieve* grootheden (lijnstukken) zijn.

2. $y^2 = dx$, of omgekeerd $dy = x^2$
$y^2 = dx \cdot f^2$, of omgekeerd $dy \cdot f^2 = x^2$
$z^2 = dx$, of omgekeerd $dy = v^2$
$z^2 = dx \cdot f^2$, of omgekeerd $dy \cdot f^2 = v^2$.

3. $y^2 = \dfrac{lx^2}{g} \cdot f^2$ $yx = f^2$

$z^2 = \dfrac{lx^2}{g} \cdot f^2$ $zx = f^2$

of ook

$y^2 = \dfrac{lv^2}{g} \cdot f^2$ $yv = f^2$

$z^2 = \dfrac{lv^2}{g} \cdot f^2$ $zv = f^2$.

Opmerkingen:
1. Hierbij worden in een uitdrukking als $A \cdot B$ drie gevallen opgenomen, namelijk $A + B$, $A - B$ en $-A + B$. Het geval $-A - B$ kan zich hier niet voordoen aangezien A en B, evenals de linkerleden, steeds positieve grootheden zijn.
2. Naast de oorspronkelijke variabelen x en y komen in deze uitdrukkingen ook de variabelen v en z voor. Hierbij worden twee gevallen onderscheiden:

i. z heeft de gedaante $z = y \pm c$, $z = y \pm \frac{bx}{a}$ of $z = y \pm \frac{bx}{a} \pm c$ maar dan heeft v de gedaante $v = x \pm h$ (en bevat dus geen term met y).

ii. v heeft de gedaante $v = x \pm c$, $v = x \pm \frac{by}{a}$, $v = x + \frac{by}{a} \pm c$, maar dan heeft z de gedaante $z = y \pm h$ (en bevat dus geen term met x).

Hierin zijn a, b, c en h bekende positieve grootheden (lijnstukken).

3. De Algemene Regel stelt dat iedere tweedegraadsvergelijking in de variabelen x en y te herleiden is tot één van de onder 2 en 3 vermelde gedaanten. Voor de vormen $zx = f^2$, $yv = f^2$ geldt daarbij uitsluitend $z = y \pm h$ en $v = x \pm k$. Deze regel wordt door De Witt niet expliciet bewezen, maar hij verwijst naar de methoden die hij in de voorbeelden heeft toegepast. In het volgende toont hij wel aan dat alle onder 2 en 3 vermelde vergelijkingen kegelsneden voorstellen. Zie ook paragraaf 10 van de Inleiding.

Teneinde voor de lezer de gang door dit hoofdstuk te vergemakkelijken, volgt eerst een globale indeling daarvan.
Achtereenvolgens worden behandeld:

i. Op de blz. [306] t/m [307] de rechte lijn .
ii. Op de blz. [308] t/m [314], regel 4 van onderen, de parabool in de gedaante van de vergelijkingen uit de eerste kolom sub 2 op blz. [305] (= blz. 41 van deze samenvatting.
iii. Op de blz. [314], regel 3 van onderen, t/m blz. [318], regel 9 van boven, de parabool in de gedaante van de vergelijkingen uit de tweede kolom sub 2, het 'omgekeerde' geval dus, waarin x en y zijn verwisseld.
iv. Op de blz. [318], regel 10 van boven, t/m blz. [330] worden de vergelijkingen uit de eerste kolom sub 3 besproken en wel die gevallen daarvan waarin de term met x^2 of die met y^2 voorzien is van het plusteken. Deze vergelijkingen blijken hyperbolen voor te stellen.
v. Op de blz. [331] t/m [332], regel 7 van onderen, worden de gevallen sub 3 uit de tweede kolom onderzocht, waarin het eveneens om een hyperbool zal blijken te gaan.
vi. Het hoofdstuk wordt afgesloten met de bespreking van de resterende gevallen die vermeld zijn in de eerste kolom sub 3 en wel die waarin de term met x^2 of die met y^2 voorzien is van het minteken en f^2 uiteraard van het plusteken is voorzien. Deze vergelijkingen blijken ellipsen c.q. cirkels voor te stellen.

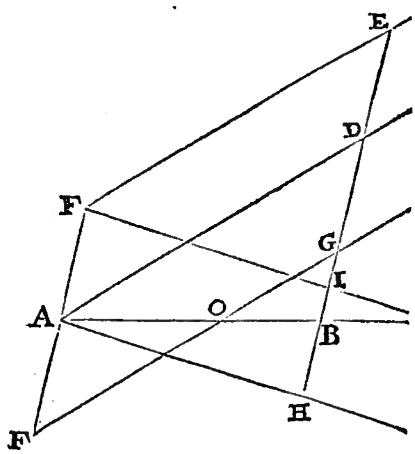
Ook in dit hoofdstuk kiest Jan de Witt een as AB, waarlangs de abscissen x worden afgepast (alleen in positieve richting) en een hoek ABE waaronder de ordinaten y worden aangebracht. Van de behandelde krommen wordt alleen het deel boven de as beschouwd.

De rechte lijn

In het geval 1 op blz. [305] (in de samenvatting op blz. 41) –de rechte lijn– worden de volgende gevallen onderscheiden en in tekening gebracht:

$$y = x,\ y = \frac{bx}{a},\ y = \frac{bx}{a} + c,\ y = \frac{bx}{a} - c,\ y = c - \frac{bx}{a}.$$

Allereerst worden de constructies in de vorm van recepten gegeven; daarna wordt zorgvuldig bewezen dat abscis en ordinaat van de punten op de geconstrueerde lijnen inderdaad voldoen aan de genoemde vergelijkingen.
Voor een illustratie zij verwezen naar Figuur 2.3 (blz. [307] van de tekst).

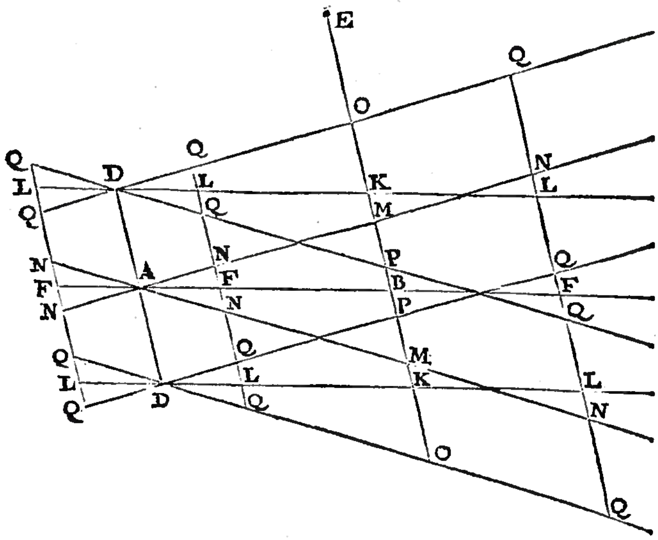


FIGUUR 2.3

De parabool

Van het geval 2 –de parabool– wordt eerst de linkerkolom behandeld. Hierbij worden negen subgevallen onderscheiden, elk weer verdeeld in subgevallen. Jan de Witt begint met zuivere receptuur, voorschriften voor de constructies dus, en merkt aan het einde daarvan op dat het bewijs dat de geconstrueerde krommen inderdaad diegene zijn die aan de bijbehorende vergelijkingen voldoen, niet moeilijk is (*Quorum quidem omnium demonstratio perfacilis est,* blz. [311], regel 6 van boven) en gaat eerst dan tot die bewijzen over.
Met betrekking tot de bijbehorende tekeningen zij opgemerkt dat Jan de Witt uitsluitend de ligging van de middellijnen, met bijbehorende toegevoegde richtingen en toppen aangeeft, maar nergens een kromme tekent.
Ook gebruikt hij per geval één en dezelfde letter voor de top in alle bij dit geval behorende deelgevallen. Zo kan men bij de parabool IX (blz. [308] t/m [314]) negen deelgevallen onderscheiden; in elk daarvan wordt de top van de betrokken parabool met de letter Q aangegeven.

Ook hier wordt, zonder bewijs maar in de vorm van recepten, aangegeven hoe men de krommen die hierboven door een vergelijking zijn gekarakteriseerd, moet tekenen.
Het gaat om de volgende situaties; de figuur die behoort bij de gevallen I t/m IX, is Figuur 2.4 (blz. [308]).



FIGUUR 2.4

I. $y^2 = dx$. Deze vergelijking stelt een parabool voor met middellijn op AB, bijbehorende top in A, terwijl de daarop geordend aangebrachte rechten met deze middellijn een hoek maken die gelijk is aan de gegeven of aangenomen hoek ABE.

II. $y^2 = dx \bullet f^2$. Deze vergelijking stelt een parabool voor met middellijn op AB. Voor de top F geldt:

Indien $y^2 = dx + f^2$, dan is de top $F(-\frac{f^2}{d}, 0)$.

Indien $y^2 = dx - f^2$, dan is de top $F(\frac{f^2}{d}, 0)$.

Indien $y^2 = -dx + f^2$, dan is de top $F(\frac{f^2}{d}, 0)$.

In dit laatste geval staat de parabool ‘met de opening naar links’.

III. $z^2 = dx$, waarbij $z = y \pm c$.

In dit geval is de lijn $y = c$ middellijn indien $z = y - c$, maar indien $z = y + c$, dan is de lijn $y = -c$ middellijn; de top in ligt in $D(0, c)$, resp. $D(0, -c)$.

IV. $z^2 = dx \bullet f^2$, waarbij $z = y \pm c$.
In dit geval is de lijn $y = c$ middellijn indien $z = y - c$, maar indien $z = y + c$, dan is de lijn $y = -c$ middellijn.
Voor de top L geldt:

Indien $z^2 = dx + f^2$ en $z = y \pm c$, dan is de top $L(-\frac{f^2}{d}, \mp c)$.

Indien $z^2 = dx - f^2$ en $z = y \pm c$, dan is de top $L(\frac{f^2}{d}, \mp c)$.

Indien $z^2 = -dx + f^2$ en $z = y \pm c$, dan is de top $L(\frac{f^2}{d}, \mp c)$, maar dan staat de parabool met 'de opening naar links'.
De parameter is in de gevallen I t/m IV gelijk aan d; de bij de gekozen middellijnen behorende toegevoegde richting is die van de rechte BE.

V. $z^2 = dx$, waarbij $z = y \pm \frac{bx}{a}$.
In dit geval kiest men op BE een punt M zodanig dat $AB : BM = a : b$. Hierbij ligt M 'boven' de lijn AB indien het gaat om $z = y - \frac{bx}{a}$ en 'onder' de lijn AB indien het gaat om $z = y + \frac{bx}{a}$; de drager van AM is dan middellijn, de richting van BE is de daaraan toegevoegde richting; de bijbehorende top ligt in A.

VI. $z^2 = dx \bullet f^2$, waarbij $z = y \pm \frac{bx}{a}$.
Ook nu kiest men AM als in geval V, maar vervolgens trekt men door de punten F en L (voor definitie zie sub II en sub IV) de rechten FL die de rechten AM snijden in de punten N.
Met betrekking tot de ligging van de parabool worden de volgende gevallen onderscheiden:

1. $z^2 = dx + f^2$ en $z = y + \frac{bx}{a}$; de lijn AM met vergelijking $y = -\frac{bx}{a}$ is middellijn, de bijbehorende top N heeft als abscis $AF = -\frac{f^2}{d}$.

2. $z^2 = dx - f^2$ en $z = y + \frac{bx}{a}$; de lijn AM met vergelijking $y = -\frac{bx}{a}$ is middellijn, de bijbehorende top N heeft als abscis $AF = \frac{f^2}{d}$.

3. $z^2 = -dx + f^2$ en $z = y + \frac{bx}{a}$; de lijn AM met vergelijking $y = -\frac{bx}{a}$ is middellijn, de bijbehorende top N heeft als abscis $AF = \frac{f^2}{d}$, maar nu staat de parabool 'met de opening naar links'.

De gevallen $z^2 = dx + f^2$, $z^2 = dx - f^2$, $z^2 = -dx + f^2$, waarbij $z = y - \frac{bx}{a}$, worden analoog behandeld.

VII. $z^2 = dx$, waarbij $z = y + \frac{bx}{a} + c$ of $z = y - \frac{bx}{a} - c$.

1. $z^2 = dx$, $z = y + \frac{bx}{a} + c$. De top ligt in $D(0, -c)$, middellijn is $y = -\frac{bx}{a} - c$.
2. $z^2 = dx$, $z = y - \frac{bx}{a} - c$. De top ligt in D (0, c), middellijn is $y = \frac{bx}{a} + c$.

VIII. $z^2 = dx$, waarbij $z = y + \frac{bx}{a} - c$ of $z = y - \frac{bx}{a} + c$.

1. $z^2 = dx$, $z = y + \frac{bx}{a} - c$. De top ligt in $D(0, c)$, middellijn is $y = -\frac{bx}{a} + c$.
2. $z^2 = dx$, $z = y - \frac{bx}{a} + c$. De top ligt in $D(0, -$ c), middellijn is $y + \frac{bx}{a} - c$.

In de gevallen VII en VIII verlopen de bijbehorende toegevoegde richtingen evenwijdig aan BE.

IX. $z^2 = dx \bullet f^2$, waarbij $z = y \pm \frac{bx}{a} \pm c$.

1. $z^2 = dx + f^2$. De abscis van de top Q is $-\frac{f^2}{d}$.
2. $z^2 = dx - f^2$. De abscis van de top Q is $\frac{f^2}{d}$.
3. $z^2 = -dx + f^2$. De abscis van de top Q is $\frac{f^2}{d}$,

maar nu staat de parabool 'met de opening naar links'.

De ligging van de bijbehorende assen en de top daarop is te vinden op de wijze die onder de punten VII en VIII is aangegeven. In totaal gaat het om negen deelgevallen.

Tenslotte wordt nog meegedeeld dat in de gevallen V t/m IX de parameter p voldoet aan de evenredigheid $e : a = d : p$. Hierbij is e gedefinieerd door
$AB : BM : AM = a : b : e$ (zie Figuur 2.4).

Na deze mededelingen bewijst Jan de Witt dat de parabolen die in elk van deze negen gevallen per recept zijn beschreven (oftewel uit de lucht vielen) met behulp van de parameters die in de gegeven vergelijkingen voorkomen, inderdaad worden voorgesteld door de vergelijkingen waarvan hij uitging.

Jan de Witt besluit nu zijn beschouwingen over de parabool met een (vrij korte) bespreking van de 'omgekeerde' gevallen, waarbij x en y van rol gewisseld hebben en wel:

$$dy = x^2,\; dy \bullet f^2 = x^2,\; dy = v^2,\; dy \bullet f^2 = v^2,$$

waarin achtereenvolgens

$$v = x \pm c\,,\; v = x \pm \frac{by}{a} \text{ of } v = x \pm \frac{by}{a} \pm c.$$

De hyperbool

Van het geval 3 op blz. [305] (= blz. 41 van deze samenvatting) beschouwt Jan de Witt allereerst die vergelijkingen in de eerste kolom waarin het om een hyperbool gaat, dat wil zeggen die waarin de termen met x^2 of v^2 voorzien zijn van het plusteken; vervolgens worden de vergelijkingen in de tweede kolom behandeld, die eveneens een hyperbool voor stellen, dat wil zeggen.

$$yx = f^2,\; zx = f^2,\; yv = f^2 \text{ en } zv = f^2,$$

waarin $\qquad z = y \pm c$ en $v = x \pm h$.

A. Met betrekking tot de eerste kolom op blz. [305], sub 3 worden vanaf blz. [318] de volgende modificaties onderscheiden.

I. $\quad \dfrac{lx^2}{g} = y^2 - f^2$ of $\dfrac{ly^2}{g} = x^2 - f^2.$

II. $\quad \dfrac{lx^2}{g} = z^2 - f^2$ of $\dfrac{lz^2}{g} = x^2 - f^2$, waarbij

1. $z = y \pm c.$

2. $z = y \pm \frac{bx}{a}$.
3. $z = y \pm \frac{bx}{a} \pm c$.

III. $\frac{lv^2}{g} = y^2 - f^2$ of $\frac{ly^2}{g} = v^2 - f^2$, waarbij $v = x \pm h$.

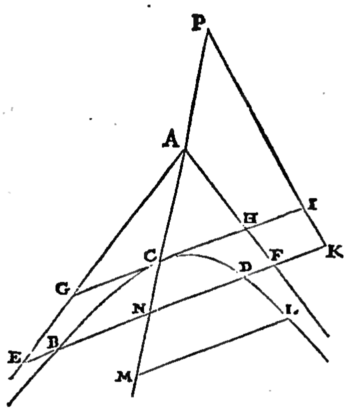
IV. $\frac{lv^2}{g} = z^2 - f^2$ of $\frac{lz^2}{g} = v^2 - f^2$, waarbij $v = x \pm h$ en

1. $z = y \pm c$.
2. $z = y \pm \frac{bx}{a}$.
3. $z = y \pm \frac{bx}{a} \pm c$.

Zoals men ziet worden hierbij steeds de gevallen onderscheiden waarin x en y, resp. x en z, y en v, z en v van rol wisselen. Ook nu krijgt men eerst een recept voor het beschrijven van een hyperbool, daarna volgt het bewijs dat de coördinaten van de punten daarop inderdaad voldoen aan de vergelijking waarvan men uitging.
Hier volgen de resultaten (zie ook Figuur 2.6).

I. $\frac{lx^2}{g} = y^2 - f^2$ of $\frac{ly^2}{g} = x^2 - f^2$. In het eerste geval kiest men de transversale middellijn van de hyperbool langs de rechte AX, door A evenwijdig aan de rechte BE, in het tweede geval kiest men de transversale middellijn langs de rechte AB; de toegevoegde richtingen zijn dan respectievelijk evenwijdig aan AB en BE. In beide gevallen is A het middelpunt en $2f$ de lengte van de transversale middellijn.
De bijbehorende parameter p wordt in beide gevallen bepaald (dit wil zeggen: gekozen) door de evenredigheid $2f : p = l : g$. Hieruit volgt dan de lengte $2d$ van de toegevoegde middellijn uit de definitie van de parameter door de evenredigheid $2f : 2d = 2d : p$.

Voor een verdere toelichting en bewijs van de juistheid van de constructie beperken we ons tot de als tweede genoemde vergelijking; Jan de Witt behandelt uiteraard beide vergelijkingen. Op de kromme kiest men het punt E, het snijpunt van de kromme met de lijn door B die met de abscis-as AB de gegeven hoek maakt. Jan de Witt beroept zich nu op de kenmerkende eigenschap van de hyperbool die hij noemde in *Liber Primus* als Stelling IX, propositie 10, blz. [196], aldaar toegelicht met de figuur op blz. [198] (hier Figuur 2.5). Deze kenmerkende eigenschap houdt voor de situatie in Figuur 2.5 in:



FIGUUR 2.5

$$ND^2 : NC \cdot NP = GH^2 : CP^2 = CH^2 : AC^2.$$

oftewel $$ND^2 : (NA - AC)(NA + AC) = CH^2 : AC^2.$$

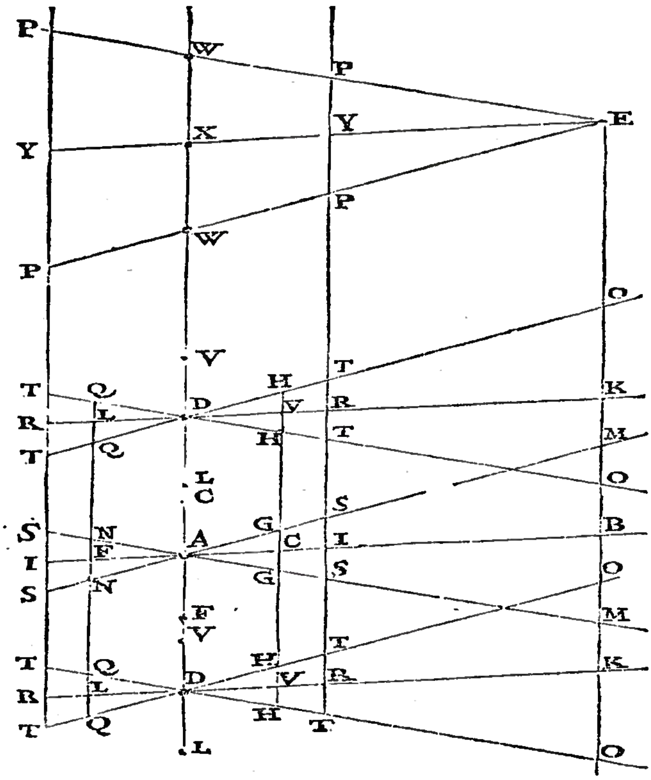
Stelt men nu $ND = y,\ NA = x, AC = \mathrm{f}, CH = d$,
dan geeft deze eigenschap

$$y^2 : (x - f)(x + f) = d^2 : f^2.$$

De verhouding $d^2 : f^2$ vindt men als volgt.
Volgens de keuze van p geldt $2f : p = l : g$ en uit de definitie van p volgt $2f : 2d = 2d : p$,
zodat $d^2 : f^2 = p : 2f = g : l$
en dus

$$\frac{ly^2}{g} = x^2 - f^2.$$

Terloops zij opgemerkt dat Jan de Witt de gevallen $l = g$ en $l \neq g$ afzonderlijk behandelt, zoals hij verderop ook bij de bespreking van de ellips de cirkel expliciet als een apart geval behandelt.
Ook hier geldt dat hij slechts aantoont dat de coördinaten van de punten op de door hem geconstrueerde kromme voldoen aan de vergelijking, maar hij spoort niet alle punten op waarvan de coördinaten aan de vergelijking voldoen. Het gevolg is dan ook dat hij slechts één tak van de hyperbool vindt.



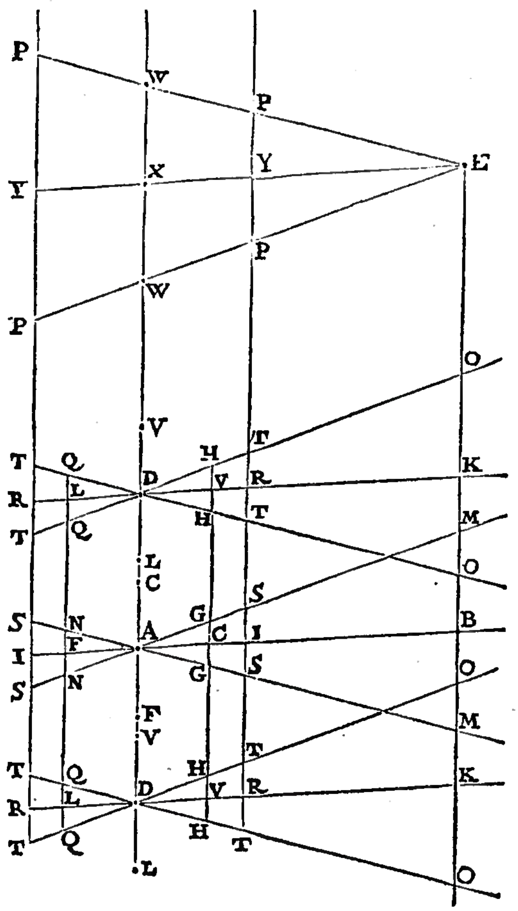
FIGUUR 2.6

II.1. $\dfrac{lx^2}{g} = z^2 - f^2$ of $\dfrac{lz^2}{g} = x^2 - f^2$, waarbij $z = y \pm c$.

In dit geval kiest men als middelpunt $D(0, c)$ indien $z = y - c$ en $D(0, -c)$ indien $z = y + c$. De redenering verloopt verder analoog aan die onder I, maar nu uitgaande van het punt D in plaats van het punt A. Het betreft nu hyperbolen met middellijn $x = 0$, respectievelijk $y = c$ indien $z = y - c$ en de hyperbolen met middellijn $x = 0$, respectievelijk $y = -c$ indien $z = y + c$. De krommen zijn over een afstand $\pm c$ verschoven in de richting waarin men de ordinaten uitzet.

II.2. $\dfrac{lx^2}{g} = z^2 - f^2$ of $\dfrac{lz^2}{g} = x^2 - f^2$, waarbij $z = y \pm \dfrac{bx}{a}$.

Als middelpunt neemt men in beide gevallen het punt A. Vervolgens kiest men de rechte AM met vergelijking $y = \frac{bx}{a}$ indien $z = y - \frac{bx}{a}$, maar de lijn AM met vergelijking $y = -\frac{bx}{a}$ indien $z = y + \frac{bx}{a}$ (zie Figuur 2.7, en dit is de figuur op blz. [323]).



FIGUUR 2.7

In het eerste geval ligt de transversale middellijn van de gezochte hyperbool op de rechte AW, evenwijdig aan BE. De hieraan toegevoegde richting is die van AM (naargelang $z = y + \frac{bx}{a}$ of $z = y - \frac{bx}{a}$).

In het tweede geval ligt de transversale middellijn van de gezochte hyperbool op de rechte AM (naargelang $z = y + \frac{bx}{a}$ of $z = y - \frac{bx}{a}$). De hieraan toegevoegde richting is die van AW.
In het eerste geval is de lengte van de transversale middellijn van de hyperbool (op AW dus) gelijk aan $2f$. De bijbehorende parameter p wordt bepaald door de evenredigheid $2f : p = a^2 l : e^2 g$; hierbij geldt

$$AB : BM : AM = a : b : e.$$

De lengte $2d$ van de toegevoegde middellijn volgt dan uit de definitie van de parameter, namelijk als de derde evenredige bij $2f$ en $2d$, dus uit

$$2f : 2d = 2d : p.$$

De zo belangrijke verhouding $d^2 : f^2$ is dan gelijk aan $\frac{e^2 g}{a^2 l}$.

In het tweede geval is de lengte $2m$ van de transversale middellijn van de hyperbool (op AM dus) gelijk aan $\frac{2ef}{a}$. De toppen liggen dus in de snijpunten van de lijnen AM met de rechten $x = \pm\, a$. In dit geval wordt de bijbehorende parameter p bepaald door de evenredigheid $2m : p = e^2 l : a^2 g$. De lengte $2d$ van de toegevoegde middellijn volgt dan weer uit de definitie van de parameter, namelijk als de derde evenredige bij $2m$ en $2d$, dus uit $2m : 2d = 2d : p$. De verhouding $d^2 : m^2$ is dan gelijk aan $\frac{a^2 g}{e^2 l}$.

Na deze voorschriften voor het beschrijven van de gezochte hyperbool, volgt ook hier weer het bewijs dat de coördinaten van de punten op de gevonden krommen inderdaad voldoen aan de vergelijkingen waarvan men is uitgegaan.

II.3. $$\frac{lx^2}{g} = z^2 - f^2 \text{ of } \frac{lz^2}{g} = x^2 - f^2, \text{ waarbij } z = y \pm \frac{bx}{a} \pm c.$$

De redenering verloopt analoog aan die onder II.2, maar nu uitgaande van het punt D (0, c) indien $z = y \pm \frac{bx}{a} - c$ en $D(0, -c)$ indien $z = y \pm \frac{bx}{a} + c$. De krommen zijn ook hier over een afstand $\pm\, c$ verschoven in de richting waarin men de ordinaten uitzet.

III. $$\frac{lv^2}{g} = y^2 - f^2 \text{ of } \frac{ly^2}{g} = v^2 - f^2, \text{ waarbij } v = x \pm h.$$

In dit geval kiest men als middelpunt $I(h, 0)$ indien $v = x - h$ en $I(-h, 0)$ indien $v = x + h$. De redenering verloopt verder analoog aan die onder I, waarbij het gaat om hyperbolen met transversale middellijn op $x = h$, respectievelijk $y = 0$ indien $v = x - h$, en hyperbolen met transversale middellijn op $x = -h$, respectievelijk $y = 0$ indien $v = x + h$. De krommen zijn over een afstand $\pm h$ verschoven in de richting waarin men de abscissen uitzet.

IV.1. $\dfrac{lv^2}{g} = z^2 - f^2$ of $\dfrac{lz^2}{g} = v^2 - f^2$, waarbij $v = x \pm h$ en $z = y \pm c$.

In dit geval kiest men als middelpunt $R(\pm h, \pm c)$, naargelang

$v = x \mp h$ en $z = y \mp c$.

De redenering verloopt dan verder analoog aan die onder I, waarbij het ook hier gaat om hyperbolen die evenwijdig verschoven zijn.

IV.2. $\dfrac{lv^2}{g} = z^2 - f^2$ of $\dfrac{lz^2}{g} = v^2 - f^2$, waarbij $v = x \pm h$ en $z = y \pm \dfrac{bx}{a}$.

In dit geval kiest men als middelpunt $S(\pm h, \pm \dfrac{bh}{a})$ naargelang $v = x \mp h$ en $z = y \mp \dfrac{bx}{a}$. De redenering verloopt dan verder analoog aan die onder II.2.

IV.3. $\dfrac{lv^2}{g} = z^2 - f^2$ of $\dfrac{lz^2}{g} = v^2 - f^2$, waarbij

$v = x \pm h$ en $z = y \pm \dfrac{bx}{a} \pm c$.

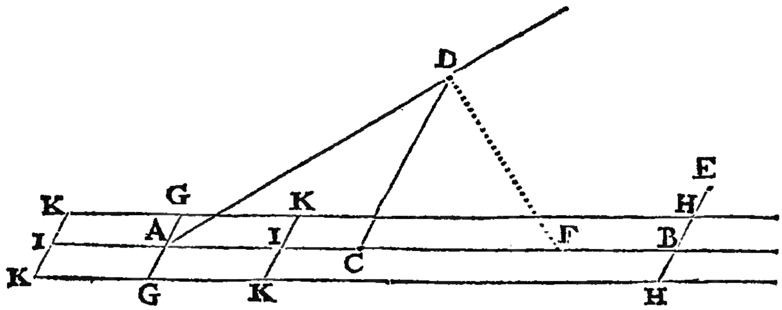
In dit geval kiest men als middelpunt $T(\pm h, \pm \dfrac{bh}{a} \pm c)$ naargelang $v = \mp h$ en $z = y \mp \dfrac{bx}{a} \mp c$. De redenering verloopt dan verder analoog aan die onder II.3.

B. Vier andere gevallen waarin de gezochte plaats een hyperbool is.

Het gaat hierbij om de vergelijkingen

1. $yx = f^2$
2. $zx = f^2$
3. $yv = f^2$
4. $zv = f^2$,

waarbij $z = y \pm h$ en $v = x \pm c$ en f, h en c bekende positieve grootheden (lijnstukken) zijn.



FIGUUR 2.8

1. $yx = f^2$.
Voor de constructie van de gezochte hyperbool wordt op de abscis-as AB het lijnstuk $AC = f$ afgepast (zie Figuur 2.8). Vervolgens wordt in de richting van de ordinaten het lijnstuk $CD = f$ uitgezet.
De gezochte plaats zal nu blijken te zijn de hyperbool met A als middelpunt, waarvan de transversale as –met lengte $2AD$ – langs de drager van AD valt (dus met top D) en met AB als asymptoot.
Dat de coördinaten van de punten op deze kromme inderdaad voldoen aan de vergelijking $yx = f^2$ blijkt eenvoudig uit de kenmerkende eigenschap van de hyperbool die men vindt in *Liber Primus*, stelling 3, op blz. [181].
Indien men immers het snijpunt van de kromme met de lijn door B in de richting van de gegeven hoek (in de richting van de ordinaten) E noemt, dan geldt volgens genoemde eigenschap $AB.BE = AC^2$, dat wil zeggen $xy = f^2$.

2. $zx = f^2$, waarbij $z = y \pm h$.
In dit geval kiest men als top niet A, maar het punt $G(0, \pm h)$, naargelang $z = y \mp h$.
De redenering verloopt dan verder analoog aan die onder 1.

3. $yv = f^2$, waarbij $v = x \pm c$.
In dit geval kiest men de top niet in A, maar in het punt $I(\pm c, 0)$, naargelang $v = x \mp c$.
De redenering verloopt dan verder analoog aan die onder 1.

4. $zv = f^2$, waarbij $z = y \pm h$ en $v = x \pm c$.
In dit geval kiest men de top niet in A, maar in het punt $K(\pm c, \pm h)$, naargelang
$v = x \mp c$ en $z = y \mp h$.
Ook hier verloopt de redenering verder analoog aan die onder 1.

De ellips

Zoals reeds gezegd, wordt dit hoofdstuk en daarmee het gehele werk, afgesloten met de bespreking van de resterende gevallen die vermeld zijn in de eerste kolom sub 3 op blz.[305], dat wil zeggen die waarin de term met x^2 of die met v^2 voorzien is van het minteken. De term f^2 heeft dan vanzelfsprekend het plusteken. Deze vergelijkingen blijken ellipsen c.q. cirkels voor te stellen.
Jan de Witt gaat –met een kleine afwijking van de formules in de genoemde kolom– uit van de formule $\frac{ly^2}{g} = f^2 - x^2$ en behandelt deze en modificaties daarvan.
Hierbij onderscheidt hij de volgende gevallen:

I. $\frac{ly^2}{g} = f^2 - x^2.$

II. $\frac{lz^2}{g} = f^2 - x^2$, waarbij

1. $z = y \pm c.$
2. $z = y \pm \frac{bx}{a}.$
3. $z = y \pm c \pm \frac{bx}{a}.$

III. $\frac{ly^2}{g} = f^2 - v^2$, waarbij $v = x \pm h.$

IV. $\frac{lz^2}{g} = f^2 - v^2$, waarbij $v = x \pm h$ en

1. $z = y \pm c.$
2. $z = y \pm \frac{bx}{a}.$
3. $z = y \pm c \pm \frac{bx}{a}.$

Hier volgen de resultaten waartoe hij komt (zie Figuur 2.9).

I. $\frac{ly^2}{g} = f^2 - x^2.$

De bewering is dat het hier gaat om de ellips die als volgt beschreven wordt: Het middelpunt is A, de transversale middellijn FAC ligt op de drager van AB, de lengte daarvan is $2f$, dus $FA = AC = f$.
De hieraan toegevoegde richting is die van de lijn BE; de bijbehorende parameter wordt bepaald door de eis $2f : p = l : g$.
Voor het bewijs dat de beschreven kromme inderdaad de gezochte plaats is, neemt Jan de Witt een punt (x, y) op de kromme en toont dan uitgaande van zijn meetkundige definitie van ellips (zie *Liber Primus*, Stelling XII, blz. [205]) aan dat de coördinaten van dit punt inderdaad aan de betreffende vergelijking voldoen. Ook merkt hij op dat, indien $l = g$ en tevens de hoek ABE recht is, de kromme een cirkel is.
Hiermee heeft hij ook hier niet bewezen dat hij alle punten die door de vergelijking worden voorgesteld, gevonden heeft!

II.1. $$\frac{lz^2}{g} = f^2 - x^2, \text{ waarbij } z = y \pm c.$$

In dit geval gaat het om een ellips (c.q. cirkel), met middelpunt $D(0, c)$ indien $z = y - c$ en $D(0, -c)$ indien $z = y + c$.
De redenering verloopt dan verder analoog aan die onder I, maar nu uitgaande het punt D in plaats van het punt A.

II.2. $$\frac{lz^2}{g} = f^2 - x^2, \text{ waarbij } z = y \pm \frac{bx}{a}.$$

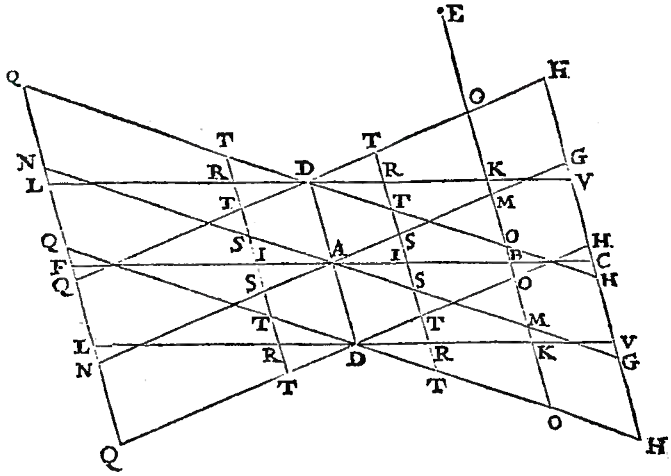
Jan de Witt construeert nu een ellips op de volgende wijze: het middelpunt is A, de transversale middellijn NAG ligt op de drager van AM, die als vergelijking heeft $y = \frac{bx}{a}$ (indien $z = y - \frac{bx}{a}$)

en $y = -\frac{bx}{a}$ (indien $z = y + \frac{bx}{a}$).

De hieraan toegevoegde richting is die van de lijn BE. De lengte $2m$ van de transversale middellijn NG is $\frac{ef}{a}$. Hierbij geldt weer

$$AB : BM : AM = a : b : e$$

(zie Figuur 2.9). De bijbehorende parameter wordt bepaald door de eis $2m : p = e^2l : a^2g$. Voor het bewijs dat de beschreven kromme inderdaad de gezochte plaats is, neemt Jan de Witt een willekeurig punt (x, y) op de zo geconstrueerde kromme en toont dan, uitgaande van zijn meetkundige definitie van ellips, aan dat de coördinaten van dit punt inderdaad aan de betreffende vergelijking voldoen.



FIGUUR 2.9

Ook merkt hij op dat, indien de hoek AME recht is en tevens $e^2 l = a^2 g$, de kromme een cirkel is.

II.3. $\dfrac{lz^2}{g} = f^2 - x^2$, waarbij $z = y \pm c \pm \dfrac{bx}{a}$. In dit geval gaat het om een ellips (c.q. cirkel) met middelpunt D (0, c) indien $z = y - c \pm \dfrac{bx}{a}$ en D (0, $-c$) indien $z = y + c \pm \dfrac{bx}{a}$. De redenering verloopt dan verder analoog aan die onder II.2, maar nu uitgaande van het punt D in plaats van het punt A.

III. $\dfrac{ly^2}{g} = f^2 - v^2$, waarbij $v = x \pm h$. In dit geval gaat het om een ellips met middelpunt $I(h, 0)$ indien $v = x - h$ en $I(-h, 0)$ indien $v = x + h$. De redenering verloopt dan verder analoog aan die onder I, maar nu uitgaande van het punt I in plaats van A.

IV.1. $\dfrac{lz^2}{g} = f^2 - v^2$, waarbij $v = x \pm h$ en $z = y \pm c$. In dit geval gaat het om een ellips met middelpunt $R(\pm h, \pm c)$ naargelang $v = x \mp h$ en $z = y \mp c$. De transversale middellijn ligt op de rechte door R evenwijdig aan AB en heeft lengte $2f$. De bijbehorende parameter is bepaald door de eis dat de verhouding van de transversale middellijn tot deze parameter is als $l : g$.

De redenering verloopt nu verder analoog aan die onder II.1, maar nu uitgaande van een van de vier punten R i.p.v. A.

IV.2. $\frac{lz^2}{g} = f^2 - v^2$, waarbij $v = x \pm h$ en $z = y \pm \frac{bx}{a}$. In dit geval gaat het om een ellips met middelpunt S, gedefinieerd als het snijpunt van de rechte $x = \pm h$ met de rechte $y = \pm \frac{bx}{a}$. De transversale middellijn ligt op deze rechte $y = \pm \frac{bx}{a}$ en heeft lengte $\frac{2ef}{a}$. De bijbehorende parameter is bepaald door de eis dat verhouding van de transversale middellijn tot de parameter is als $e^2l : a^2g$. De redenering verloopt nu verder analoog aan die onder II.2.

IV.3. $\frac{lz^2}{g} = f^2 - v^2$, waarbij $v = x \pm h$ en $z = y \pm c \pm \frac{bx}{a}$. In dit geval gaat het om een ellips met middelpunt T, gedefinieerd als het snijpunt van de rechte $x = \pm h$ met de rechte door D ($\pm h$, 0) met als vergelijking $y = \pm h \pm \frac{bx}{a}$. De transversale middellijn ligt op deze rechte $y = \pm h \pm \frac{bx}{a}$ en heeft lengte $\frac{2ef}{a}$. De bijbehorende parameter is bepaald door de eis dat de verhouding van de transversale middellijn tot de parameter is als $e^2l : a^2g$. De redenering verloopt nu verder analoog aan die onder II.2 en II.3.

3

Tekst en vertaling

Jan de Witt's

Grondbeginselen van de Kromme Lijnen

Tweede Boek

Hoofdstuk I

Algemene Stelling

[243] Bij ieder probleem waarin het onderzoek van een plaats aan de orde wordt gesteld, of deze nu betrekking heeft op een rechte lijn of op een kromme lijn, komt men uit op een vergelijking die een willekeurig aangenomen punt op de plaats bepaalt [1.1], indien men twee onbekende en onbepaalde lijnstukken, die een gegeven of aangenomen hoek insluiten, als bekend en bepaald beschouwt [1.2].
Indien in deze vergelijking, nadat deze tot de eenvoudigste gedaante is herleid, geen van beide onbekenden tot de tweede of hogere macht verheven is, dat wil zeggen, indien deze noch met zichzelf, noch met de andere onbekende in een product, oftewel vermenigvuldigd voorkomt, dan zal de gezochte plaats een rechte lijn zijn.
Indien echter een van deze onbekenden tot de tweede macht verheven is, maar de andere niet en deze laatste noch met zichzelf noch met de eerste vermenigvuldigd is, dan zal de gezochte plaats een parabool zijn.
Maar indien elk van beide tot de tweede macht verheven is of de ene met de andere vermenigvuldigd in de vergelijking voorkomt (de vergelijking is immers niet van hogere graad indien er sprake is van een vlakke of ruimtelijke plaats [1.3]), dan zal de gezochte plaats òf een hyperbool òf een ellips òf een cirkelomtrek zijn.

IOHANNIS DE WITT

ELEMENTA CVRVARVM LINEARVM.

LIBER SECVNDVS.

CAPVT I.

PROPOSITIO GENERALIS.

IN omni quæstione, ubi indagandus proponitur Locus, sive is sit ad lineam rectam, sive ad curvam, suppositis duabus lineis rectis incognitis atque indeterminatis, datum vel assumptum angulum comprehendentibus, tanquam cognitis ac determinatis, devenitur ad Æquationem, assumptum quodlibet quæsiti Loci punctum determinantem; in qua quidem æquatione, postquam ad simplicissimos terminos erit reducta, si neutra incognitarum ad duas pluresve dimensiones assurgat, hoc est, si neque in se, neque in alteram incognitam ducta seu multiplicata reperiatur, quæsitus Locus erit linea recta: At si earundem incognitarum altera ad quadratum ascendat, altera verò non item, sed neque in se, neque in alteram incognitam ducta sit, erit Locus quæsitus Parabola. Quòd si verò utraque ad quadratum ascendat, sive altera in alteram ducta in æquatione reperiatur (altiùs enim æquatio non assurget, si de loco Plano Solidovè quæstio sit): erit Locus quæsitus vel Hyperbola, vel Ellipsis, vel Circuli circumferentia.

 Quo-

[244] Van al deze krommen kan een gedetailleerde bepaling, een beschrijving en het bijbehorende bewijs [1.4] op verschillende wijzen worden gegeven, maar het zal voldoende zijn er een te geven die behoort tot de eenvoudigste en meest algemene.
In het eerste geval nu, waarin geen van beide onbekende grootheden voorkomt in de tweede of hogere macht, kan de vergelijking herleid worden tot een van de volgende gedaanten; een van de onbekenden wordt hierbij voorgesteld door x, de andere door y [1.5].

I. $y = \frac{bx}{a}$, of (als we stellen $a = b$), $y = x$.

II. $y = \frac{bx}{a} + c$, of, met dezelfde onderstelling als hierboven, $y = x + c$.

III. $y = \frac{bx}{a} - c$, of $y = x - c$.

IV. $y = -\frac{bx}{a} + c$, of $y = -x + c$.

Laat echter met betrekking tot deze onbekende grootheden volgens afspraak ondersteld worden dat het begin van één daarvan, bijvoorbeeld van x, vast en onveranderlijk is, en dat aangenomen wordt dat deze grootheid zich onbeperkt uitstrekt vanuit dit vaste en onveranderlijke beginpunt langs een rechte met gegeven stand, maar dat de andere lijn, eveneens van onbepaalde lengte, verbonden is met de eerste in het variabele uiteinde, onder een gegeven of gekozen hoek [1.6].
Uitgaande van deze onderstellingen lijkt het mogelijk dat, wat zoëven gezegd is, door middel van de volgende stellingen op passende wijze te formuleren, te bepalen en te bewijzen.

STELLING I

Propositie 1

Indien de vergelijking luidt $y = \frac{bx}{a}$, dan zal de gezochte plaats een rechte lijn zijn.

Laat immers het punt A het onveranderlijke beginpunt van x zijn [1.7] en laten we aannemen dat deze x zich langs de rechte AB onbeperkt uitstrekt. Laat vervolgens, nadat op deze AB een willekeurig punt, zeg B, is aangenomen, BC getrokken worden

Quorum quidem omnium particularis determinatio, deſcriptio, & demonſtratio variis modis fieri poteſt; at verò ex ſimpliciſſimis, generaliſſimisque aliquem annotaſſe ſuffecerit.

Ac primo quidem caſu, cùm neutra quantitatum incognitarum ad duas pluresve dimenſiones aſcendit, ſi earum una exprimatur per x, atque altera per y, poteſt æquatio ad aliquam ſequentium formularum reduci.

I. $y \propto \frac{bx}{a}$, ſive (poſito $a \propto b$) $y \propto x$.

II. $y \propto \frac{bx}{a} + c$, ſive, poſito, ut ſupra, $y \propto x + c$.

III. $y \propto \frac{bx}{a} - c$, ſive $y \propto x - c$.

IV. $y \propto - \frac{bx}{a} + c$, ſive $y \propto - x + c$.

Fiat autem earundem quantitatum incognitarum ſecundùm regulam talis aſſumptio, ut initium unius, verbi gratiâ, ipſius x, certum ſit & immutabile, utque eadem illa quantitas ex certo & immutabili illo initio in linea recta poſitione data intelligatur indefinitè extendi, altera verò indeterminatæ quoque longitudinis linea priori in extremitate incerta in dato vel aſſumpto angulo conjungi. Quibus quidem ſuppoſitis, ea, quæ prædicta ſunt, ſequentibus Theorematis non incongruè proponi, determinari, ac demonſtrari poſſe videntur.

THEOREMA I.

Propoſitio 1.

Si æquatio fit $y \propto \frac{bx}{a}$, erit locus quæſitus linea recta.

Sit enim ipſius x initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam AB indefinitè ſe extendere intelligatur. Dein, ſumpto in eadem AB puncto utcunque, veluti B, agatur BC in angulo

[245] onder de hoek *ABC*, gelijk aan een gegeven of aangenomen hoek en wel zo dat de verhouding van de afgesneden *AB* tot de getrokken *BC* dezelfde is als die van de bekende *a* tot de bekende *b*, dat wil zeggen dat *AB* staat tot *BC* zoals *a* staat tot *b*. Laat vervolgens door de punten *A* en *C* de rechte *AC* getrokken worden die zich onbegrensd [1.8] uitstrekt; deze zal dan de gezochte plaats zijn.
Wanneer men immers op *AC* een willekeurig punt, zeg *D*, aanneemt en *DE* trekt onder de hoek *DEA*, gelijk aan de gegeven of aangenomen hoek, dan zal[1], wanneer *DE* *y* genoemd wordt, *AE* staan tot *ED* zoals *AB* tot *BC*, dat wil zeggen zoals *a* staat tot *b*, en zo staat dan *x* tot *y*. Men krijgt dan[2] $ay = bx$, dus geldt (wanneer men aan beide kanten deelt door *a*): $y = \frac{bx}{a}$ [1.9].

Aangezien het punt *D* willekeurig is aangenomen op de rechte *AC*, zal hetzelfde bewijs gelden voor alle andere punten op de rechte *AC* en dus is *AC* de gezochte plaats. En zo is niet alleen de juistheid van de geponeerde stelling bewezen, maar is ook de gezochte plaats bepaald [1.10].

STELLING II

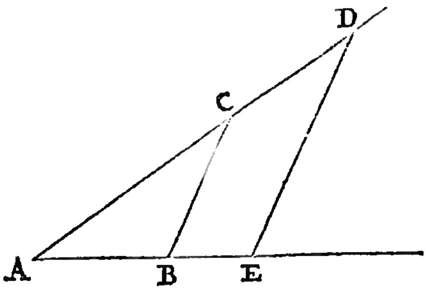
Propositie 2

Indien de vergelijking luidt $y = \frac{bx}{a} + c$, dan zal de gezochte plaats een rechte lijn zijn.

Laat met dezelfde veronderstellingen en constructies als hierboven ook nog vanuit *A* het lijnstuk *AF* getrokken worden, evenwijdig aan *BC* en wel aan dezelfde kant (van *ABE*, vert.) als deze en gelijk aan de bekende *c*. Wanneer dan ook nog vanuit *F* de lijn *FG* getrokken is, evenwijdig aan *AC*, dan beweer ik dat deze *FG* de gezochte plaats is.
Wanneer immers op *FG* een willekeurig punt genomen is, zeg *G* , en *GE* getrokken is onder de hoek *AEG*

[1] I,29 en VI,4; [2] VI, 16.

angulo A B C, ipsi dato vel assumpto æquali; ita ut eadem sit ratio interceptæ A B ad ductam B C, quæ est a cognitæ ad b cognitam.



hoc est, ut sit uti a ad b, ita A B ad B C. Denique per puncta A & C ducatur recta A C, indefinitè extensa, eritque hæc ipsa locus quæsitus.

Etenim assumpto in A C puncto utcunque, veluti D, ductâque D E in angulo D E A, dato vel assumpto æquali, si eadem D E vocetur y, erit [1] ut A B ad B C, hoc est, ut a ad b, ita A E ad E D, hoc est, ita x ad y. Et fit [2] $ay \infty bx$, hoc est, dividendo utrinque per a, erit $y \infty \frac{bx}{a}$.

[1] per 29 primi, & 4 sexti.

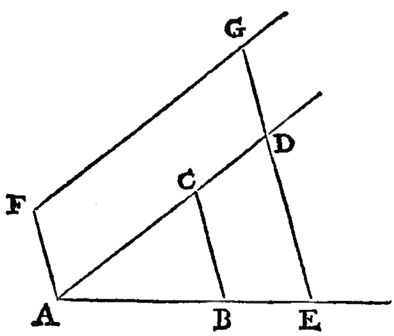
[2] per 16 sexti.

Quare cum punctum D utcunque sumptum sit in linea A C, erit eadem de omnibus aliis lineæ A C punctis demonstratio, ac proinde ipsa A C locus est quæsitus. Atque ita non solùm Theorematis propositi veritas demonstrata, sed & Locus quæsitus determinatus est.

THEOREMA II.

Propositio 2.

Si æquatio sit $y \infty \frac{bx}{a} + c$, erit Locus quæsitus linea recta.



Positis, factisque, ut supra, agatur insuper ex A recta A F ipsi B C parallela, atque ad easdem cum ea partes, quæ sit æqualis c cognitæ. Et ex F ductâ F G parallelâ A C, dico eandem F G esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in F G puncto utcunque, veluti G, ductâque GE in angulo AEG,

[246] gelijk aan de gegeven of aangenomen hoek, die de lijn AC in D snijdt, dan zal, indien men GE de naam y geeft, gelden $ED = y - c$.
Echter geldt, evenals hierboven[1], dat AE staat tot ED zoals AB staat tot BC, dat wil zeggen dat x staat tot $y - c$ zoals a staat tot b en daarom[2] geldt $ay - ac = bx$, oftewel $ay = bx + ac$ en dus, na deling door a, $y = \frac{bx}{a} + c$. Hetgeen te bewijzen en te bepalen was.

STELLING III

Propositie 3

Indien de vergelijking luidt $y = \frac{bx}{a} - c$, dan zal de gezochte plaats een rechte lijn zijn.

Laat met dezelfde veronderstellingen en constructies als bij de eerste stelling ook nog vanuit A het lijnstuk AF getrokken worden, evenwijdig aan BC en wel aan de andere kant (van ABE, vert.) als deze en gelijk aan de bekende c. Wanneer dan ook weer vanuit F de lijn FG getrokken wordt, evenwijdig aan AC, die de rechte AB snijdt in H, dan beweer ik dat HG de gezochte plaats is.
Wanneer immers daarop een willekeurig punt, zeg G, is aangenomen en GE getrokken is onder de hoek AEG, gelijk aan de gegeven of aangenomen hoek, die (nl. GE, vert.) na verlenging AC snijdt in D, dan zal, indien men GE de naam y geeft, gelden $ED = y + c$ [1.11]. Nu geldt[3] op grond van de constructie dat AE staat tot ED als AB tot BC, dat wil zeggen dat x staat tot $y + c$ als a staat tot b en dus[4] $ay + ac = bx$, oftewel $ay = bx - ac$ en dus, na deling door a, $y = \frac{bx}{a} - c$. Hetgeen gesteld is.

---

[1] I, 29 en VI, 4; [2] VI, 16; [3] I, 29 en VI, 4; [4] VI, 16.

246 ELEM. CVRVARVM

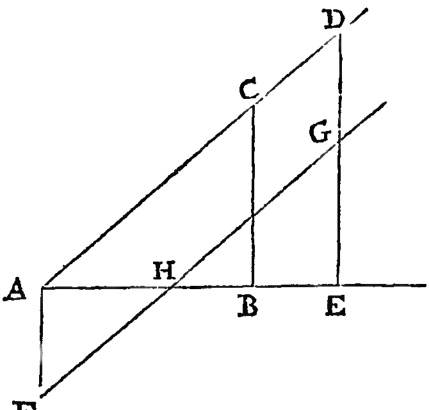
dato vel assumpto æquali, quæ secet rectam A C in D, si eadem G E vocetur y, erit E D $\infty\ y - c$. At verò est, ut supra [1], uti A B ad B C, ita A E ad E D, hoc est, ut a ad b, ita x ad $y - c$: ac propterea [2] $ay - ac \infty bx$, vel $ay \infty bx + ac$, adeoque, factâ divisione per a, $y \infty \frac{bx}{a} + c$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

[1] per 29 primi, & 4 sexti.
[2] per 16 sexti.

THEOREMA III.

Propositio 3.

Si æquatio sit $y \infty \frac{bx}{a} - c$, erit Locus quæsitus linea recta.



Positis factisque ut in Theoremate 1mo, agatur insuper ex A recta A F, ipsi B C parallela, atque ad oppositas cum ea partes, quæ sit æqualis c cognitæ. Et ex F ductâ iterum F G ipsi A C parallelâ, secante rectam A B in H, dico H G esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in eadem puncto utcunque veluti G, ductâque G E in angulo A E G, dato vel assumpto æquali, quæ producta secet A C in D, si eadem G E vocetur y, erit E D $\infty\ a + c$. Iam verò est [3] ex constructione, ut A B ad B C, ita A E ad E D, hoc est, ut a ad b, ita x ad $y + c$: ac propterea [4] $ay + ac \infty bx$, vel $ay \infty bx - ac$, adeoque, factâ divisione per a, $y \infty \frac{bx}{a} - c$. Quod est propositum.

[3] per 29 primi, & 4 sexti.
[4] per 16 sexti.

THEO-

[247]

STELLING IV

Propositie 4

Indien de vergelijking luidt $y = c - \frac{bx}{a}$, dan zal de gezochte plaats een rechte lijn zijn.

Hier gelden dezelfde onderstellingen en constructies als in de tweede stelling, behalve dan dat het punt C aan de andere kant van AB valt en dat de hoek ABC gelijk is aan het supplement van de gegeven of aangenomen hoek, zoals blijkt in de bijgevoegde figuur.
Laat nu vanuit F de lijn FG getrokken worden, evenwijdig aan AC, die (nl. FG, vert.) de lijn AB in H snijdt. Ik beweer dat dan FH de gezochte plaats is.

Wanneer men immers op FH een willekeurig punt neemt, zeg G, en GE trekt onder de hoek AEG, gelijk aan de gegeven of aangenomen hoek, die na verlenging AC in D snijdt, dan zal, indien GE de naam y krijgt, gelden dat $ED = c - y$.

Op grond van de constructie staat[1] AE tot ED, zoals AB staat tot BC, dat wil zeggen dat x staat tot $c - y$ zoals a tot b, daarom[2] zal gelden $ac - ay = bx$, oftewel $ay = ac - bx$, dat wil zeggen, na deling aan beide kanten door a, $y = c - \frac{bx}{a}$.
Hetgeen gesteld was.

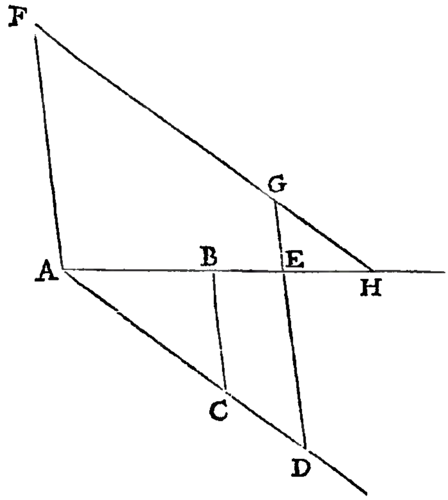
Maar het kan ook gebeuren dat bij de bewerking, voordat men tot de vergelijking komt, een van de onbekende grootheden geheel wegvalt en de andere alleen overblijft en wel gelijk aan een bekende grootheid

[1] I, 13 en 29 en VI, 4; [2] VI, 16.

THEOREMA IV.

Propositio 4.

Si æquatio sit $y \infty c - \frac{bx}{a}$, erit Locus quæsitus linea recta.



Positis, factisque, ut in Theoremate 2do, excepto quòd punctum C ab opposita parte ipsius AB cadat, quodque angulus A B C æqualis sit dati vel assumpti anguli ad binos rectos complemento, quemadmodum in adjuncta figura apparet, agatur ex F recta F G ipsi A C parallela, occurrens rectæ A B in H: dico F H esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in F H puncto utcunque, veluti G, ductâque G E in angulo A E G, dato vel assumpto æquali, quæ producta secet A C in D, si eadem G E vocetur y, erit E D $\infty\; c - y$. Cumque sit [1] ex constructione, ut A B ad B C, ita A E ad E D, hoc est, ut a ad b, ita x ad $c - y$: erit propterea [2] $ac - ay \infty bx$, vel $ay \infty ac - bx$, id est, dividendo utrinque per a, $y \infty c - \frac{bx}{a}$. Quod erat propositum.

[1] per 13 & 29 primi, & 4 sexti.
[2] per 16 sexti.

At verò fieri etiam potest, ut per operationem, priusquam ad æquationem deveniatur, quantitatum incognitarum altera penitus evanescat, alteraque sola alicui cognitæ quantitati æqualis remaneat; atque exin-

[248] en dat vervolgens bovendien twee betrekkingen ontstaan, die tot de volgende gedaante herleid moeten worden, namelijk

1. $y = c$, of
2. $x = c$.

STELLING V

Propositie 5

Indien de vergelijking luidt $y = c$, dan is de gezochte plaats een rechte lijn.

Laat het onveranderlijke begin van de grootheid x, die bij de bewerking weggevallen is, het punt A zijn en laten wij aannemen dat deze x zich langs de rechte AB onbeperkt uitstrekt. Wanneer men dan eerst vanuit A het lijnstuk AF trekt, gelijk aan c, dat met AB een hoek maakt die gelijk is aan de gegeven of aangenomen hoek of aan het supplement daarvan en indien men dan vanuit F de lijn FG trekt evenwijdig aan AB, dan beweer ik dat FG de gezochte plaats is.

Wanneer men immers op FG een punt willekeurig aanneemt, zeg G, en GB trekt evenwijdig aan AF, dan is het duidelijk dat GB en alle daaraan evenwijdige lijnstukken[1] gelijk zullen zijn aan het lijnstuk AF, dat wil zeggen dat $y = c$. Hetgeen te bewijzen was.

STELLING VI

Propositie 6

Indien de vergelijking luidt $x = c$, dan zal de gezochte plaats een rechte lijn zijn.

Laat op de lijn AB die, zoals hierboven, aangenomen is als x, vanaf het punt A een lijnstuk AB afgezet worden met als lengte de bekende c en laat vanuit B onder de gegeven of aangenomen hoek de rechte BC getrokken worden. Ik beweer dan dat deze BC, indien onbeperkt verlengd, de gezochte plaats is.
Wanneer men immers daarop willekeurig een punt aanneemt,

---

[1] I, 34.

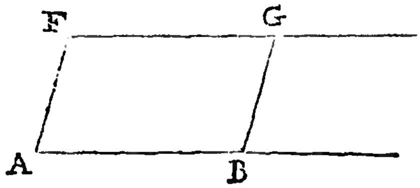
exinde binæ insuper formulæ nascuntur, quæ huc referri debent: nimirum,

1. $y \infty c$, vel
2. $x \infty c$.

THEOREMA V.

Propositio 5.

Si æquatio sit $y \infty c$, Locus quæsitus est linea recta.



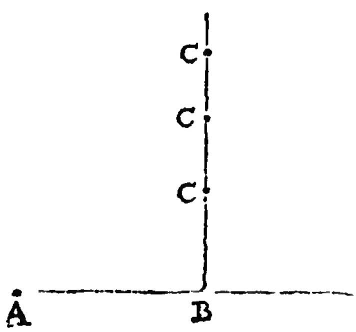
Sit quantitatis x, quæ per operationem evanuit, initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam A B indefinitè se extendere intelligatur. Deinde ex A ductâ A F ∞ c, faciente cum A B angulum, ipsi dato vel assumpto aut ejusdem ad binos rectos supplemento æqualem, si ex F agatur F G ipsi A B parallela, dico eandem F G esse Locum quæsitum.

Etenim assumpto in F G puncto utcunque, veluti G, ductâque G B ipsi A F parallelâ, apparet eandem G B omnesque ipsi æqui-
[1] per 34 primi. distantes [1] rectæ A F fore æquales, hoc est, esse $y \infty c$. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA VI.

Propositio 6.

Si æquatio sit $x \infty c$, erit Locus quæsitus linea recta.



In linea A B, quæ, ut supra, pro x concepta sit, sumatur à puncto A longitudo A B æqualis c cognitæ, atque ex B in dato vel assumpto angulo ducatur recta B C. dico eandem B C, indefinitè productam, esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in eadem puncto

[249] zeg C, dan zal volgens onderstelling CB met de eerder genoemde AB een hoek ABC maken die gelijk is aan de gegeven of aangenomen hoek en dan kan dus deze CB y genoemd worden. Maar volgens de constructie is, en blijft steeds, AB, dat wil zeggen x, gelijk aan c. Hetgeen gesteld is.

HOOFDSTUK II

Verder het tweede geval dat hierboven geformuleerd is. Hierbij is immers in de vergelijking, nadat deze tot de eenvoudigste gedaante is herleid, een van de onbekende grootheden in het kwadraat verheven, de andere echter niet alzo, maar deze komt noch met zichzelf, noch met de eerste onbekende grootheid vermenigvuldigd voor. In dit geval zal de vergelijking tot één van de volgende gedaanten herleid kunnen worden.

I	$y^2 = ax$	of omgekeerd	$ay = x^2$
II.	$y^2 = ax + b^2$	„ „	$ay + b^2 = x^2$
III.	$y^2 = ax - b^2$	„ „	$ay - b^2 = x^2$
IV.	$y^2 = -ax + b^2$	„ „	$b^2 - ay = x^2$.

Hierbij wordt verondersteld dat y en x onbekende grootheden zijn, die ofwel vanaf het begin zijn aangenomen, ofwel daarna zijn ingevoerd, zoals later uitvoeriger uiteengezet zal worden [2.1].

STELLING VII

Propositie 7

Indien de vergelijking luidt $y^2 = ax$, of omgekeerd $ay = x^2$, dan zal de gezochte plaats een parabool zijn.

Laat het onveranderlijke begin van x het punt A zijn en laat aangenomen worden dat deze x zich langs de rechte AB onbeperkt uitstrekt en laat de gegeven of aangenomen hoek gelijk zijn aan de hoek ABC.
Laat in het eerste geval deze AB aangenomen worden als middellijn van een parabool, waarmee de daarop geordend aangebrachte rechten hoeken maken die gelijk zijn aan de gegeven of aangenomen hoek ABC en waarvan de rechte zijde AF gelijk is aan de bekende a [2.2].

ĉto utcunque, veluti C, erit ex hypothesi C B cum priore A B comprehendens angulum A B C dato vel assumpto æqualem, poteritque proinde eadem C B vocari y. At verò est ex constructione, & remanet semper A B, hoc est, $x \infty c$. Quod est propositum.

CAPUT II.

Porrò secundo casu, supra expresso, cùm nempe in æquatione, ad simplicissimos terminos reductâ, quantitatum incognitarum altera ad quadratum ascendit, altera verò non item, sed neque in se, neque in alteram quantitatem incognitam ducta reperitur: poterit æquatio ad aliquam sequentium formularum reduci.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & yy \infty \ ax \\ \text{II.} & yy \infty \ ax + bb \\ \text{III.} & yy \infty \ ax - bb \\ \text{IV.} & yy \infty - ax + bb \end{array}\right\} \text{vel conversim} \left\{\begin{array}{l} ay \infty xx \\ ay + bb \infty xx \\ ay - bb \infty xx \\ bb - ay \infty xx. \end{array}\right.$$

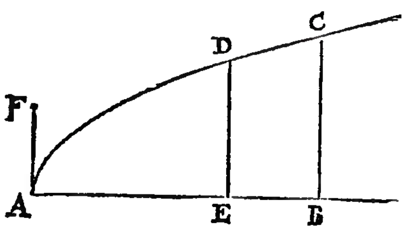
Supponendo y & x esse quantitates incognitas, vel ab initio conceptas, vel postmodum assumptas, ut mox latiùs explicabitur.

THEOREMA VII.

Propositio 7.

Si æquatio sit $yy \infty ax$, vel conversim $ay \infty xx$: erit Locus quæsitus Parabola.

Sit ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam A B indefinitè se extendere intelligatur, & sit datus vel assumptus angulus æqualis angulo A B C; Assumatur primò eadem A B ut Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant cum ipsa angulos æquales dato vel assumpto angulo A B C, cujusque latus rectum A F



[250] Ik beweer dat dan de parabool *ADC* die[1] beschreven is met *A* als top op de genoemde middellijn en met als rechte zijde, behorende bij deze middellijn, het lijnstuk a, de gezochte plaats is.
Laat immers op deze kromme *ADC* willekeurig een punt zijn aangenomen, zeg *D*, en laat het lijnstuk *DE* getrokken zijn onder de hoek *AED* die gelijk is aan de gegeven of aangenomen hoek. Indien dan deze *DE* y genoemd wordt, dan zal op grond van de aard van een parabool[2] het vierkant op *ED* gelijk zijn aan de rechthoek *FAE*, dat wil zeggen $y^2 = ax$. Hetgeen gesteld was.

Om echter het tweede deel van deze stelling te bewijzen onder dezelfde veronderstellingen als hierboven, moet men vanuit het punt *A* de rechte *AH* trekken, evenwijdig aan *BC* en deze *AH* als middellijn aannemen, waarmee de daarop geordend aangebrachte rechten hoeken maken die gelijk zijn aan de gegeven of aangenomen hoek *ABC* of *AHC*. Als men dan net zo te werk gaat als hierboven, dan zal de parabool *ADC* de gezochte plaats zijn.
Immers[3] het vierkant op *GD* of het vierkant op *AE* is gelijk aan de rechthoek ingesloten door *FA* en *AG*, oftewel *FA* en *ED*, dat wil zeggen $x^2 = ay$. Hetgeen te bewijzen was.

STELLING VIII

Propositie 8

Indien de vergelijking luidt $y^2 = ax + b^2$ of omgekeerd $ay + b^2 = x^2$, dan zal de gezochte plaats een parabool zijn.

Laat het onveranderlijke begin van x het punt *A* zijn en laten we aannemen dat deze x zich langs de rechte *AB* onbegrensd uitstrekt en laat de gegeven of aangenomen hoek gelijk zijn aan de hoek *ABC*. Laat vervolgens *AB* verlengd worden in de richting van *A* tot aan *G*, zó dat $AG = \dfrac{b^2}{a}$. Indien dan *GB* genomen wordt als middellijn waarmee de daarop geordend aangebrachte rechten hoeken maken die gelijk zijn aan de gegeven of aangenomen hoek *ABC*, en waarvan de bijbehorende rechte zijde *GF*

---

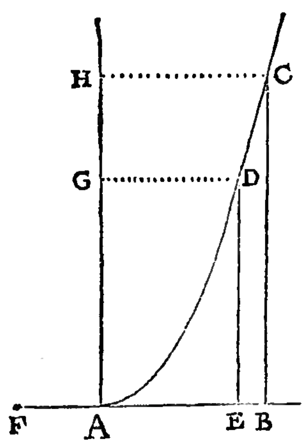
[1]gevolg 10 van prop. 1, Lib. I, blz. [168] en gevolg 4 van prop. 2, Lib. I, blz. [176]; [2]prop.1, Lib. I, blz. [162]; [3]prop. 1, Lib. I, blz. [162].

[1] per 10 Coroll. primi, & 4 Coroll. secundi hujus.

[2] per 1 primi hujus.

sit æquale a cognitæ. Dico Parabolam A D C, quæ [1] per prædictæ diametri verticem A descripta sit, habeatque latus rectum eidem diametro correspondens $\infty\ a$, esse Locum quæsitum.

Sit enim in eadem curva A D C assumptum punctum utcunque, veluti D, ductâque D E in angulo A E D dato vel assumpto æquali, si ipsa D E vocetur y, erit, ex natura Paraboles [2] quadratum ex E D ∞ F A E rectangulo, hoc est, $yy \infty ax$. Quod erat propositum.



Ad demonstrationem autem secundæ hujus Theorematis partis iisdem ut supra suppositis, ducenda est ex A puncto recta A H ipsi B C parallela, atque eadem A H assumenda pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel assumpto angulo A B C seu A H C æquales, ac cætera, ut supra, eritque Parabola A D C Locus quæsitus.

[3] per 1 primi hujus.

Est enim [3] quadratum ex G D sive A E quadratum æquale rectangulo sub F A & A G, seu F A & E D, id est, $xx \infty ay$. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA VIII.

Propositio 8.

Si æquatio sit $yy \infty ax + bb$ aut conversim $ay + bb \infty xx$, erit Locus quæsitus linea Parabolica.

Sit ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem illa x per rectam A B indefinitè se extendere intelligatur, sitque angulus datus vel assumptus æqualis angulo A B C. Deinde producatur A B versùs A usque ad G, ita ut sit A G $\infty \frac{bb}{a}$; assumptâque G B pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos æquales dato vel assumpto angulo A B C, cujusque latus rectum

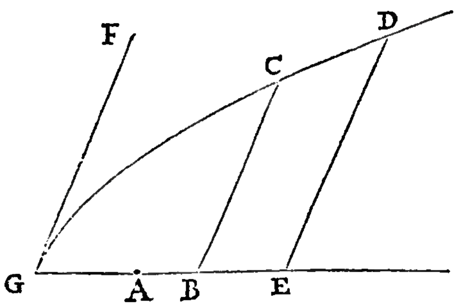
[251] gelijk is aan de bekende a, dan beweer ik dat de parabool GCD die beschreven is met G als top op de genoemde middellijn en die een rechte zijde, behorende bij deze middellijn, gelijk aan a heeft, de gezochte plaats is.Wanneer men immers op deze kromme willekeurig een punt aanneemt, zeg D, en DE trekt onder de hoek AED, gelijk aan de gegeven of aangenomen hoek en men dan DE y noemt, dan zal gelden $y^2 = ax + b^2$ omdat GE, oftewel $AE + AG$, gelijk is aan $x+\frac{b^2}{a}$ en omdat op grond van de aard van een parabool[1] het vierkant op ED gelijk is aan de rechthoek ingesloten door FG en GE. Hetgeen als eerste te bewijzen was.

Ter verklaring van het tweede deel van deze stelling trekken we, onder dezelfde veronderstellingen als hierboven, vanuit A de rechte AH evenwijdig aan BC; wanneer deze dan verlengd is in de richting van A, tot G zodanig dat $AG=\frac{b^2}{a}$, dan beweer ik het volgende: indien men met GH als middellijn en met GF, gelijk aan a, als rechte zijde een parabool beschrijft, zeg GC, die de rechte AB in I snijdt, dan is de kromme ID de gezochte plaats.

Op grond van de aard van een parabool[2] is immers de rechthoek gevormd door FG en GH

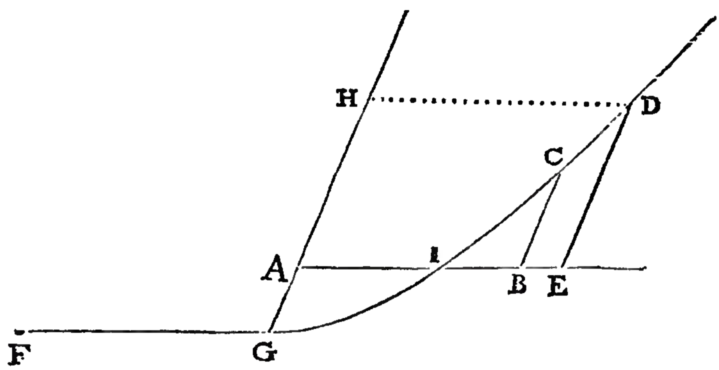
[1]prop. 1, Lib. I, blz. [162]; [2]prop. 1, Lib. I, blz.[162].

rectum G F sit æquale a cognitæ: dico Parabolam G C D, quæ per prædictæ diametri verticem G descripta sit, habeatque latus rectum eidem diametro correspondens $\infty\ a$, esse Locum quæsitum.



Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque D E in angulo A E D, dato vel assumpto æquali, si ipsa D E vocetur y, quoniam G E sive A E + A G est $\infty\ x + \frac{bb}{a}$, atque ex natura Paraboles [1] quadratum ex E D ∞ rectangulo sub F G & G E, erit $yy \infty ax + bb$. Quod primò erat demonstrandum. [1] per 1 primi hujus.

Ad explicationem verò secundæ hujus Theorematis partis iisdem ut supra positis, ducatur ex A recta A H ipsi B C parallela; eâdemque productâ versùs A usque ad G, ita ut A G sit $\infty\ \frac{bb}{a}$, dico,



si ad G H diametrum latere recto G F $\infty\ a$ Parabola describatur ut G C, quæ secet rectam A B in I, curvam I D esse Locum quæsitum.

Est enim [2] ex natura Paraboles rectangulum sub F G & G H con- [2] per 1 primi hujus.

[252] gelijk aan het vierkant op *HD* of *AE* en dus zal, omdat *GH* oftewel $DE + AG$, gelijk is aan $y + \frac{b^2}{a}$ en omdat $FG = a$, na de vereiste vermenigvuldiging, gelden $ay + b^2 = x^2$. Hetgeen gesteld is.

STELLING IX

Propositie 9

Indien de vergelijking luidt $y^2 = ax - b^2$ of omgekeerd $ay - b^2 = x^2$, dan zal de gezochte plaats een parabool zijn.

Laat, onder dezelfde veronderstellingen als bij de vorige stelling, van de lijn *AB* het lijnstuk $AG = \frac{b^2}{a}$ afgenomen worden en laten overigens dezelfde afspraken gelden als daar : ik beweer dat dan de kromme *GCD* de gezochte plaats is.
Wanneer men immers daarop willekeurig een punt aanneemt, zeg *D*, en *DE* neerlaat evenwijdig aan *CB*, dan zal, wanneer men *DE* *y* noemt, op grond van de aard van een parabool[1] het vierkant op *ED* oftewel y^2 gelijk zijn aan de rechthoek ingesloten door *FG* en *GE*, dat wil zeggen gelijk aan het product van *a* met $x - \frac{b^2}{a}$, namelijk $ax - b^2$. Hetgeen te bewijzen en te bepalen was.

Laat, om het tweede deel van deze stelling te verklaren, onder dezelfde veronderstellingen als hierboven, vanuit *A* de rechte *AH* getrokken worden evenwijdig aan *BC* en laat, nadat men daarvan een stuk $AG = \frac{b^2}{a}$ heeft afgetrokken, *GH* als middellijn gekozen worden en laat het overige deel van de redenering verlopen als hierboven; ik beweer dat dan de kromme *GCD* de gezochte plaats is.

[1] prop. 1, Lib. I, blz. [162].

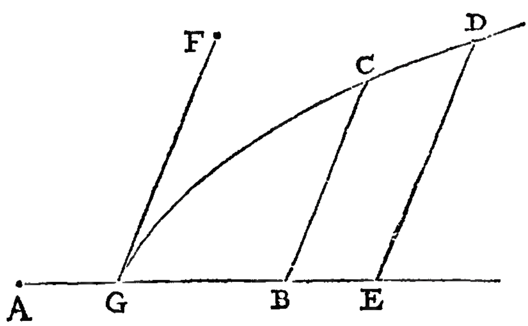
contentum æquale quadrato ex H D seu A E, ac proinde, quoniam G H, sive D E + A G, $\infty\ y + \frac{bb}{a}$, atque F G $\infty\ a$, erit, factâ debitâ multiplicatione, $ay + bb \infty xx$. Quod est propositum.

THEOREMA IX.

Propositio 9.

Si æquatio sit $yy \infty ax - bb$ aut conversim $ay - bb \infty xx$, erit Locus quæsitus linea Parabolica.

Suppositis iisdem, quæ in præcedenti Theoremate, auferatur ab A B recta A G $\infty\ \frac{bb}{a}$, fiantque cætera, ut ibidem dictum est: dico curvam G C D esse Locum quæsitum.



Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, demissâque D E ipsi C B parallelâ, si eadem D E vocetur y, erit ex natura
[1] per 1 primi hujus. Paraboles [1] quadratum ex E D seu yy æquale rectangulo sub F G & G E, id est, producto ex a in $x - \frac{bb}{a}$, nimirum, $ax - bb$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

Ad explicationem autem secundæ hujus Theorematis partis, iisdem ut supra positis, ducatur ex A recta A H ipsi B C parallela, atque ab ea subductâ A G $\infty\ \frac{bb}{a}$, sumatur G H pro diametro, &c. ut supra, dico curvam G C D fore Locum quæsitum.

Est

[253] Op grond van de aard van een parabool[1] is immers de rechthoek ingesloten door FG en GH gelijk aan het vierkant op HD oftewel AE. Omdat nu GH of $DE - AG$ gelijk is aan $y - \frac{b^2}{a}$ en $FG = a$, daarom zal, na de vereiste vermenigvuldiging, gelden $ay - b^2 = x^2$. Hetgeen te bewijzen was.

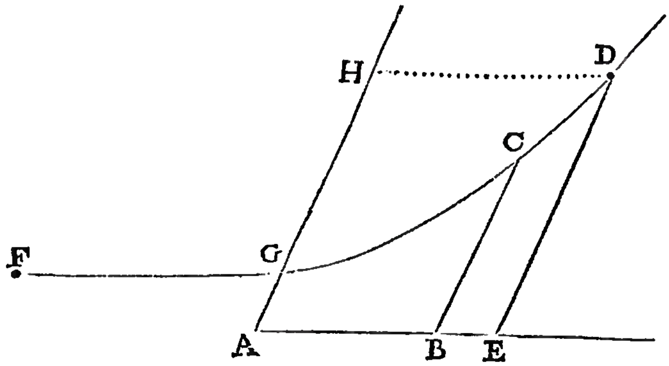
STELLING X

Propositie 10

Indien de vergelijking luidt $y^2 = b^2 - ax$ of omgekeerd $b^2 - ay = x^2$, dan zal de gezochte plaats een parabool zijn.

Laat immers, evenals hierboven, het onveranderlijke begin van x het punt A zijn en laten we aannemen dat deze x zich onbeperkt uitstrekt langs de rechte AB vanaf A in de richting van B. Laat ook nog de gegeven of aangenomen hoek gelijk zijn aan de hoek ABC. Men past nu eerst vanuit A in de richting van B het stuk $AG = \frac{b^2}{a}$ af en men kiest vervolgens GA

[1] prop. 1, Lib. I, blz. [162].



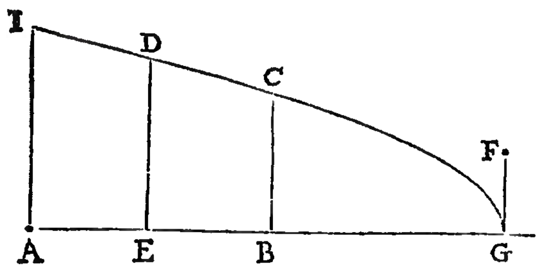
Eſt enim ¹ ex natura Paraboles rectangulum ſub F G & G H ¹ *per eandem.*
contentum æquale quadrato ex H D ſeu A E, ideoque, quoniam G H ſive D E — A G æquatur $y - \frac{bb}{a}$, atque F G ∞ a, erit, factâ debitâ multiplicatione, $ay - bb \infty xx$. Quod erat propoſitum.

THEOREMA X.

Propoſitio 10.

Si æquatio ſit $yy \infty bb - ax$ aut converſim $bb - ay \infty xx$, erit Locus quæſitus linea Parabolica.

Sit enim, ut ſupra, ipſius x initium immutabile A punctum,



intelligaturque eadem x in recta A B indefinitè ſe ab A extendere versùs B; angulus verò datus vel aſſumptus eſto æqualis angulo A B C. Deinde ab A versùs B aſſumptâ A G ∞ $\frac{bb}{a}$ ſumatur G A

[254] als middellijn waarmee de daarop geordend aangebrachte rechten hoeken maken die gelijk zijn aan de gegeven of aangenomen hoek ABC of aan het supplement [2.3] daarvan.
Indien men hierna in de richting van A een parabool beschrijft met G als top op de genoemde middellijn, waarvan de rechte zijde GF, die met deze middellijn correspondeert, gelijk is aan a, welke parabool de rechte AI, evenwijdig aan BC, in I snijdt, dan beweer ik dat het deel van deze parabool dat begrepen is tussen de top G en het snijpunt I, namelijk de kromme GCI de gezochte plaats is [2.4].
Wanneer men immers daarop willekeurig een punt aanneemt, zeg D, en DE neerlaat evenwijdig aan CB en deze DE y noemt, dan geldt het volgende: omdat op grond van de aard van een parabool[1] het vierkant op DE gelijk is aan de rechthoek ingesloten door FG en GE en, omdat GE oftewel $AG - AE$ gelijk is aan $\frac{b^2}{a} - x$, en $FG = a$, zal na de vereiste vermenigvuldiging, gelden $y^2 = b^2 - ax$. Hetgeen te bewijzen en te bepalen was.

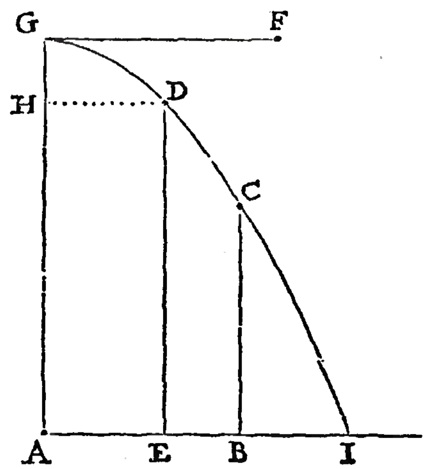
Laat, om het tweede deel van deze stelling te verklaren, onder dezelfde veronderstellingen als hierboven, vanuit A het lijnstuk AG getrokken worden evenwijdig aan BC en gelijk aan $\frac{b^2}{a}$ en laat GA als middellijn gekozen worden.
Laat de rest van de redeneringen zijn zoals hierboven, behalve dan dat het snijpunt I op de rechte AE ligt.
Er geldt nu: nadat men de rechte DH evenwijdig aan AB getrokken heeft, zal op grond van de aard van een parabool[2] de rechthoek, ingesloten door FG en GH gelijk zijn aan het vierkant op HD of AE en omdat GH oftewel $AG - ED$ gelijk is aan $\frac{b^2}{a} - y$ en $FG = a$, zal na passende vermenigvuldiging gelden $b^2 - ay = x^2$.
Hetgeen gesteld was.

[1]prop. 1, Lib. I, blz. [162]; [2]idem.

pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos æquales dato vel aſſumpto A B C, aut ejuſdem ad duos rectos ſupplemento. Quo facto, ſi per prædictæ diametri verticem G versùs A Parabola deſcribatur, cujus latus rectum G F eidem diametro correſpondens ſit ∞ a, quæque Parabola rectam A I ipſi B C parallelam ſecet in I: dico ejuſdem Parabolæ portionem, inter verticem G & punctum interſectionis I interceptam, nempe curvam G C I, eſſe Locum quæſitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, demiſsâque D E ipſi C B parallelâ, ſi eadem D E vocetur y, cum [1] ex natura Paraboles quadratum ipſius D E ſit æquale rectangulo ſub F G & G E, & G E ſive A G — A E ſit $\infty\ \frac{bb}{a} - x$, ac F G ∞ a, factâ debitâ multiplicatione, erit $yy \infty bb - ax$. Quod demonſtrandum determinandumque erat.

[1] per 1 primi hujus.



Ad explicationem autem ſecundæ hujus Theorematis partis, iiſdem ut ſupra poſitis, ex A ducatur A G ipſi B C parallela atque $\infty\ \frac{bb}{a}$, aſſumaturque G A pro diametro, &c. per omnia, ut ſupra, excepto quòd punctum interſectionis I ſit in recta A E.

Cum enim ductâ D H ipſi A B parallelâ [2] ex natura Paraboles rectangulum ſub F G & G H contentum ſit æquale quadrato ex H D ſeu A E, ſitque G H ſive A G — E D $\infty\ \frac{bb}{a} - y$, atque F G ∞ a, factâ multiplicatione, ut decet, erit $bb - ay \infty xx$. Quod erat propoſitum.

[2] per eandem.

Regula

[255] **ALGEMENE REGEL EN EEN MANIER OM ALLE VERGELIJKINGEN DIE VOORTKOMEN UIT EEN DAARTOE LEIDENDE BEREKENING – IN HET GEVAL WAARIN DE GEZOCHTE PLAATS EEN PARABOOL IS – TE HERLEIDEN TOT EEN VAN DE VIER GEVALLEN DIE REEDS UITEENGEZET ZIJN, MET BEHULP VAN DE –EVENEENS VIER– VOORAFGAANDE STELLINGEN.**

Indien het geval zich voordoet dat een onbekende grootheid, die in een vergelijking tot de tweede macht verheven is, maar daarin ook voorkomt in de eerste macht, vermenigvuldigd met een andere grootheid, hetzij bekend hetzij onbekend, of zelfs ook met elk van beide een product vormt, dan moet men in plaats daarvan een andere grootheid aannemen die de helft van dié grootheid meer, ofwel minder is, waarmee deze (nl. de als eerste genoemde onbekende grootheid, vert.), zoals gezegd, een product vormt. Dit 'meer' of 'minder' hangt ervan af of genoemd product voorzien is van een plus– respectievelijk minteken. Hierdoor zal de vergelijking zelf herleid worden tot één van de vier voorgaande gevallen, zodat het niet moeilijk is een daarbij passende parabool te bepalen door middel van datgene wat hierboven uiteengezet is [2.5].

Voorbeelden van de herleiding van vergelijkingen tot de gedaante van Stelling VII.

Indien de vergelijking luidt $y^2 + 2ay = bx - a^2$, dan zal, indien men volgens de Regel stelt $z = y + a$, gelden $z - a = y$. Indien men dan overal in de vergelijking in plaats van y stelt $z - a$ en het kwadraat daarvan in plaats van y^2, dan zal men krijgen:

$$z^2 - 2az + a^2 + 2az - 2a^2 = bx - a^2,$$

dat wil zeggen als men alle termen weglaat die tegen elkaar wegvallen, dan geldt $z^2 = bx$.

Hieruit blijkt terstond dat de vergelijking herleid is tot de gedaante van Stelling VII en dat dus de gezochte plaats een parabool is.

Om deze nauwkeurig te bepalen zij in bijgevoegde figuur (blz. [256], vert.) het punt A het onveranderlijke beginpunt van x en wordt aangenomen dat deze x zich vanaf A langs de rechte AE onbeperkt uitstrekt. Laat ook de gegeven of aangenomen hoek die y en x insluiten, gelijk zijn aan de hoek EAF.

Indien men aanneemt dat y uitsteekt boven de lijn AE, dan moet men vervolgens, omdat $z = y + a$, daaronder de rechte GB trekken, evenwijdig aan AE, *Regula univerſalis, moduſque reducendi omnes æquationes, quæ ex convenienti operatione producuntur, cùm Locus quæſitus eſt Parabola, ad aliquem quatuor caſuum, præcedentibus totidem Theorematibus jam explicatorum.*

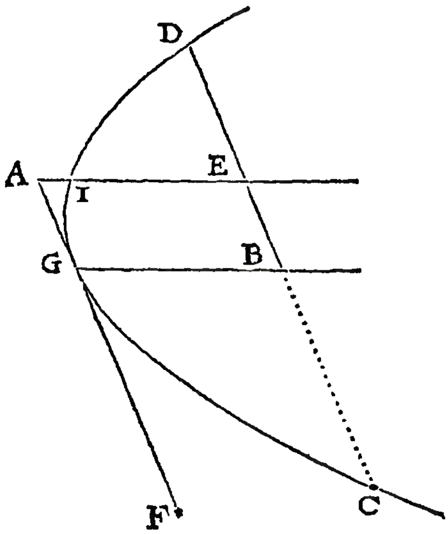
Si contingat ut quantitas incognita, quæ in æquatione ad duas dimenſiones aſcendit, in eadem quoque inveniatur unius dimenſionis, cum alia, ſive cognita, ſive incognita quantitate, vel etiam cum utraque planum aliquod faciens, loco ejuſdem aſſumenda eſt alia, vel ipſam excedens, vel ab ea deficiens dimidio quantitatis, quacum illa planum, uti dictum eſt, conſtituere reperitur, pro diverſa dicti plani ſigno + vel — affectione. Quo opere ipſa æquatio ad aliquem quatuor præcedentium caſuum reducetur, ita ut ei convenientem lineam Parabolicam determinare, per ea quæ ſuperiùs ſunt explicata, haud difficile ſit.

Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis VII.

Si æquatio ſit $yy + 2ay \propto bx - aa$; aſſumpto, juxta Regulam, $z \propto y + a$, erit $z - a \propto y$. Hinc ſi ubique in æquatione loco ipſius y ſubſtituatur $z - a$, ejuſdemque quadratum loco yy: habebitur $zz - 2az + aa, + 2az - 2aa \propto bx - aa$, hoc eſt, omiſſis iis quæ ſeſe mutuò tollunt, erit $zz \propto bx$. Vnde ſtatim apparet æquationem eſſe reductam ad formulam Theorematis VII, ac proinde Locum quæſitum eſſe Parabolam. Ad cujus ſpecificam determinationem eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile A punctum, eademque x intelligatur ſe ab A per rectam AE indefinitè extendere; ſitque datus vel aſſumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAF. Deinde, quoniam z eſt $\propto y + a$, ſi y ſupra lineam AE exſurgere intelligatur, ducenda eſt infra eam recta GB ipſi AE parallela, ita

[256] zó dat het deel van de rechte AF en de delen van alle daaraan evenwijdige lijnen die begrepen zijn tussen AE en GB, evenals AG, gelijk zijn aan de bekende a.
Verder moet de genoemde GB als middellijn van de parabool genomen worden.
Indien hierop een parabool beschreven wordt met G als top en als rechte zijde, die met deze middellijn GB correspondeert, het lijnstuk GF gelijk aan b, welke parabool de rechte AE snijdt in I, dan beweer ik dat de kromme ID, onbeperkt verlengd in de richting van D, de gezochte plaats is.
Wanneer men immers op deze kromme willekeurig een punt aanneemt, zeg D, en DE trekt evenwijdig aan AF en deze DE y noemt en vervolgens deze verlengt totdat deze de genoemde middellijn GB snijdt in B, dan zal, op grond van de constructie, het afgesneden stuk EB gelijk zijn aan a en dus de gehele DB gelijk aan $y + a$, dat wil zeggen gelijk aan z.
Omdat op grond van de aard van een parabool het vierkant op DB gelijk is aan de rechthoek ingesloten door FG en GB, oftewel door FG en AE, daarom zal ook gelden $z^2 = bx$ of, na substitutie van $y + a$ in plaats van z, $y^2 + 2ay + a^2 = bx$, dat wil zeggen $y^2 + 2ay = bx - a^2$. Hetgeen te bewijzen en te bepalen was.
Indien echter de vergelijking geweest zou zijn $y^2 - 2ay = bx - a^2$ en men volgens de Regel de substitutie en de berekening had uitgevoerd zoals hierboven, dan zou men uitgekomen zijn op dezelfde vergelijking, namelijk $z^2 = bx$.
Omdat echter in dit geval volgens de Regel $z = y - a$ gesteld moest worden, zou daarom ook de middellijn GB (onder dezelfde onderstellingen als hierboven) niet onder, maar boven de rechte AE terecht gekomen zijn en al het overige zou op dezelfde manier als hierboven afgehandeld moeten worden.
Indien de vergelijking echter luidt $by - a^2 = x^2 + 2ax$, die het omgekeerde is van de hierboven behandelde (dat wil zeggen de eerste vergelijking van dit voorbeeld op blz. [255], vert.) dan zal, als men volgens de regel stelt $v = x + a$, gelden $v - a = x$.
Indien men dan in plaats van x in de vergelijking invult $v - a$

ita ut pars rectæ A F, omniumque ipsi parallelarum, intercepta inter A E & G B, veluti A G, æquetur a cognitæ. Porrò prædicta G B assumenda est ut Parabolæ diameter, ad quam si per ejusdem verticem G, existente G F latere recto, ipsi diametro G B correspondente, $\propto b$ Parabola describatur, secans rectam A E in I: dico curvam I D indefinitè versùs D productam esse Locum quæsitum.



Etenim assumpto in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi A F parallelâ, si eadem D E vocetur y, producaturque donec prædictæ diametro G B occurrat in B: erit ex constructione intercepta E B $\propto a$, ac proinde tota D B $\propto y + a$, hoc est, z. Quare cum ex natura Paraboles quadratum ex D B æquetur rectangulo sub F G & G B, vel F G & A E: erit quoque $zz \propto bx$, sive, restituto $y + a$ loco z, $yy + 2ay + aa \propto bx$, id est, $yy + 2ay \propto bx - aa$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

Quòd si æquatio fuisset $yy - 2ay \propto bx - aa$, factâ assumptione secundùm Regulam, atque operatione, ut supra; deventum fuisset ad eandem æquationem, nimirum, $zz \propto bx$. Sed quoniam z eo casu juxta Regulam assumenda fuisset $\propto y - a$, idcirco quoque diameter G B (iisdem ut supra positis) non infra, sed supra rectam A E cecidisset, cæteraque omnia eodem quo supra modo expedienda fuissent.

Si verò æquatio sit $by - aa \propto xx + 2ax$, quæ est conversa superiùs expositæ, assumpto juxta Regulam $v \propto x + a$, erit $v - a \propto x$. Quare si loco ipsius x in æquatione substituatur $v - a$, atque hujus

[257] en het kwadraat daarvan in plaats van x^2, dan zal dus gelden:

$$by - a^2 = v^2 - 2av + a^2 + 2av - 2a^2,$$

dat wil zeggen dat er geldt, wanneer men de termen weglaat die tegen elkaar wegvallen,

$$by = v^2.$$

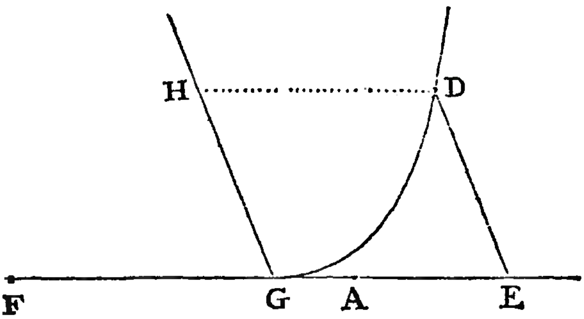
Hieruit blijkt onmiddellijk dat de vergelijking herleid is tot de gedaante van genoemde Stelling VII (het omgekeerde geval) en dat dus de gezochte plaats een parabool is.
Om deze nauwkeurig te bepalen nemen we aan dat in bijgevoegde figuur het onveranderlijke beginpunt van x het punt A is en dat volgens veronderstelling deze x zich vanaf het genoemde punt A onbeperkt uitstrekt langs de rechte AE. Laat ook de gegeven of aangenomen hoek, die door y en x wordt ingesloten, gelijk zijn aan de hoek AGH of FGH.
Vervolgens moet men, omdat v gelijk is aan $x + a$, de rechte AE verlengen in de richting van A tot aan G, zodanig dat $AG = a$; ook moet men vanuit G GH trekken die de hoek EGH of FGH vormt, gelijk aan de gegeven of aangenomen hoek en deze GH moet genomen worden als middellijn van de parabool.
Indien men dan daarop met G als top en met rechte zijde $FG = b$ een parabool beschrijft, zeg GD, dan beweer ik dat de kromme GD de gezochte plaats is.
Indien men immers daarop willekeurig een punt aanneemt, zeg D, DE evenwijdig aan HG trekt en deze DE y noemt, dan geldt het volgende: omdat $GE = x + a$, oftewel v en omdat op grond van de aard van een parabool de rechthoek FGH gelijk is aan het vierkant op HD of GE, daarom zal $by = v^2$ of, als men $x + a$ weer in de plaats van v invult,

$$by = x^2 + 2ax + a^2 \text{ oftewel } by - a^2 = x^2 + 2ax,$$

hetgeen te bepalen en te bewijzen was.
Maar indien de vergelijking geweest zou zijn $by - a^2 = x^2 - 2ax$, dan zou men volgens de Regel, met de noodzakelijke veranderingen, dezelfde berekening uitgevoerd moeten hebben en in dat geval zou het punt G tussen A en E zijn terechtgekomen.

hujus quadratum loco xx: erit $by - aa \infty vv - 2av + aa, + 2av - 2aa$, hoc est, omissis iis, quæ se mutuò tollunt, erit $by \infty vv$.

Vnde statim apparet, reductam esse æquationem ad formulam prædicti Theorematis septimi conversim, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Ad cujus specificam determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile punctum A,



intelligaturque eadem x à prædicto puncto A per rectam A E indefinitè se extendere, sitque datus vel assumptus angulus, quem comprehendunt y & x, æqualis angulo A G H vel F G H. Deinde, quoniam v æquatur $x + a$, producenda est recta A E versùs A usque ad G, ita ut A G sit $\infty\ a$; & ex G ducenda est G H, faciens angulum E G H vel F G H dato vel assumpto angulo æqualem, ipsaque G H sumenda est pro Parabolæ diametro, ad quam si per ejus verticem G atque latere recto F G $\infty\ b$ Parabola describatur, ut G D: dico curvam G D esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi H G parallelâ, si eadem D E vocetur y, cum G E sit $\infty\ x + a$ seu v, atque ex natura Paraboles F G H rectangulum ∞ quadrato ex H D sive G E, erit $by \infty vv$, sive, restituto $x + a$ loco v, $by \infty xx + 2ax + aa$, seu $by - aa \infty xx + 2ax$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

Quòd si æquatio fuisset $by - aa \infty xx - 2ax$, eadem per omnia mutatis mutandis secundùm Regulam instituenda fuisset operatio, cecidissetque eo casu punctum G inter A & E.

Pars II. Kk Eodem

[258] Op dezelfde wijze geldt het volgende: indien de vergelijking luidt

$$y^2 + \frac{2bxy}{a} + 2cy = bx - \frac{b^2x^2}{a^2} - c^2$$

en indien men volgens de regel stelt

$$z = y + \frac{bx}{a} + c,$$

dan geldt $$y = z - \frac{bx}{a} - c.$$

Wanneer men dit ingevuld heeft in plaats van y en het kwadraat daarvan in plaats van y^2, de termen geschrapt heeft die tegen elkaar wegvallen en alle termen op de gebruikelijke wijze heeft gerangschikt, dan zal de bovenstaande vergelijking de volgende gedaante aangenomen hebben:

$$z^2 = \frac{2bcx}{a} + bx$$

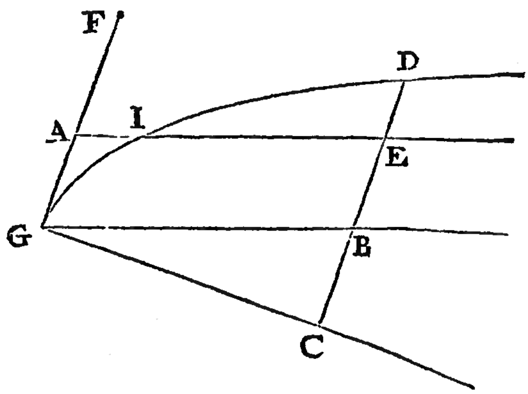
of $$z^2 = dx,$$

indien d wordt gesubstitueerd in plaats van $\frac{2bc}{a} + b$.

Hieruit blijkt opnieuw dat de vergelijking herleid is tot de gedaante van Stelling VII en dat de gezochte plaats dus een parabool is [2.6].
Om deze nauwkeurig te bepalen [2.7] zij in de volgende figuur het onveranderlijke beginpunt van x het punt A en wordt verondersteld dat deze x zich vanaf het punt A langs de rechte AE onbeperkt uitstrekt. Laat ook de gegeven of aangenomen hoek die y en x insluiten, gelijk zijn aan de hoek EAF of EAG.

Daarna gaat men als volgt te werk: aangezien $z = y + c + \frac{bx}{a}$ moet men indien men onderstelt dat y boven de lijn AE uitsteekt, zeg als ED, eerst daaronder en evenwijdig daaraan de rechte GB trekken, zodat het stuk van FG en de stukken van alle daaraan evenwijdige lijnen tussen de genoemde AE en GB, zoals AG en EB, gelijk zijn aan de bekende c.
Na deze constructie geldt het volgende: aangezien ieder lijnstuk dat als y kan optreden na verlenging tot GB, zoals bijvoorbeeld DB, gelijk is aan $y + c$, moet men daaraan $\frac{bx}{a}$ toevoegen, zodat dit lijnstuk gelijk wordt aan de gekozen z.
Dit moet als volgt gebeuren: GB of AE geven, indien onbeperkt verlengd, steeds een waarde voor x. Men moet dan vanuit G volgens Stelling I van dit boek onder deze GB een rechte trekken, zeg GC, zodat van alle lijnen evenwijdig aan GF de stukken tussen GB en GC,

Eodem modo ſi æquatio ſit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \infty bx - \frac{bbxx}{aa} - cc$ aſſumpto juxta Regulam $z \infty y + \frac{bx}{a} + c$: erit $y \infty z - \frac{bx}{a} - c$. Quo ſubſtituto in locum ipſius y, ejuſdemque quadrato loco yy, expunctisque iis, quæ ſe invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis ſequentem formam induta erit ſuperior æquatio: $zz \infty \frac{2bc}{a}x + bx$, aut $zz \infty dx$, ſi loco $\frac{2bc}{a} + b$ ſubſtituatur d. Vnde iterum apparet, æquationem eſſe reductam ad formulam Theorematis VII, ac propterea Locum quæſitum eſſe Parabolam. Ad cujus ſpecificam determinationem eſto in ſequenti figura ipſius x initium immutabile punctum A, atque eadem x ab A puncto per rectam A E indefinitè ſe extendere intelligatur, ſitque datus vel aſſumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A F vel E A G. Deinde quoniam z eſt $\infty y + c + \frac{bx}{a}$, ſi y ſupra lineam A E exſurgere intelligatur, veluti E D, ducenda primùm eſt infra eandem recta G B ipſi parallela, ita ut partes rectæ F G omniumque ipſi æquidiſtantium inter prædictas A E & G B interceptæ, veluti A G, E B, æquentur c cognitæ.



Quo peracto, cum quævis recta, quæ poſſit eſſe y, ad rectam G B producta, ut, exempli gratiâ, D B, ſit $\infty y + c$, oportet ipſi adhuc adjungere $\frac{bx}{a}$, ut fiat æqualis z aſſumptæ. Quare, cum G B ſeu A E indefinitè ſumpta ſit ∞x, ſi ex G juxta I Theorema hujus libri infra eandem G B recta ducatur, ut G C; ita ut omnium ipſi G F parallelarum partes inter G B & G C interceptæ, veluti B C, ad partes ipſius G B inter G & dictas parallelas

[259] zoals BC, dezelfde verhouding hebben tot de stukken van GB tussen G en de genoemde parallellen, bijvoorbeeld BG, als b en a.
Om dit te bereiken moet men ervoor zorgen dat GB staat tot BC zoals a staat tot b: dan zal gelden $BC = \frac{bx}{a}$. Op dezelfde wijze zullen alle lijnstukken die vanaf GB evenwijdig aan BC getrokken worden naar GC, de lengte $\frac{bx}{a}$ hebben.
Zo zal een willekeurig lijnstuk dat boven AE uitsteekt en als y-waarde kan optreden, na verlenging tot GC, zoals bijvoorbeeld DC, gelijk zijn aan $y + c + \frac{bx}{a}$, oftewel gelijk aan z.
Aangezien het kwadraat hiervan gelijk moet zijn aan dx, blijkt hieruit direct het volgende:
Indien men een parabool beschrijft met middellijn GC, waarvan de rechte zijde GF zo gekozen is dat de rechthoeken ingesloten door deze rechte zijde en de delen van de middellijn tussen de top en de geordend aangebrachte rechten, gelijk zijn aan dx, dan zal deze parabool de gezochte plaats zijn.
Maar daar de verhouding van het lijnstuk GB tot het lijnstuk BC en van de andere overeenkomstige lijnstukken bekend is, namelijk als a tot b, en de hoek GBC die daardoor wordt ingesloten eveneens bekend is – deze is immers gelijk aan de gegeven of aangenomen hoek EAF – daarom zal ook[1] de verhouding van GB tot GC en van de andere daarmee overeenkomstige lijnstukken bekend zijn: deze zij als die van de bekende a tot een bekende e.
Aangezien GB of AE, indien onbeperkt aangenomen, zich laat voorstellen door x, zal GC, eveneens onbeperkt aangenomen, dit wil zeggen, elk stuk van de middellijn tussen de top en de geordend aangebrachte rechten, dus gelijk zijn aan $\frac{ex}{a}$.
Dit moet, na vermenigvuldiging met de rechte zijde, de term dx in de vergelijking opleveren; deze zelfde term dx van de vergelijking moet daarom, na deling door $\frac{ex}{a}$, zoals hierboven vermeld, de rechte zijde weer opleveren en door deze deling blijkt dus dat de gezochte rechte zijde gelijk is aan $\frac{ad}{e}$.
Wanneer men dus $GF = \frac{ad}{e}$ als rechte zijde neemt en, zoals boven vermeld, met GC als middellijn de parabool GID beschrijft, die de rechte AE in I snijdt, dan beweer ik dat de kromme ID de gezochte plaats zal zijn.
Hier moet, evenals ook bij andere soortgelijke voorbeelden, terloops het volgende opgemerkt worden: indien de beschreven parabool de genoemde AE niet zou snijden, dan zou dat zeker erop wijzen dat het voorgelegde probleem, dat via een correcte berekening tot de hierboven geformuleerde vergelijking leidde, van die aard is dat de te onderzoeken plaats op grond van zijn eigen aard wel

---

[1] VI, 6.

rallelas interceptas, veluti B G, eandem rationem habeant, quæ eſt inter b & a. Quod ipſum ut fiat, ſtatuatur ut a ad b, ita G B ad B C: eritque B C $\infty \frac{bx}{a}$. Eodem modo rectæ omnes ipſi B C parallelæ, quæ à G B ad G C ducuntur, erunt $\infty \frac{bx}{a}$. Atque ita recta quælibet ſupra A E exſurgens, quæ poſſit eſſe y, poſtquam ad rectam G C erit producta, ut, exempli gratiâ, D C, erit $\infty\, y + c + \frac{bx}{a}$ ſeu z. Hujus igitur quadratum cum debeat eſſe $\infty\, dx$, ſtatim inde apparet, ſi Parabola deſcripta foret ad diametrum G C, cujus latus rectum G F ita eſſet aſſumptum, ut rectangula, ſub eodem latere recto & diametri portionibus, inter verticem & ordinatim applicatas interceptis, contenta, forent $\infty\, dx$, eandem illam Parabolam fore Locum quæſitum. At verò cum ratio rectæ G B ad rectam B C, aliarumque ſimilium, cognita ſit, nempe, ut a ad b; ſitque itidem notus angulus G B C, ſub iiſdem comprehenſus, utpote æqualis dato vel aſſumpto E A F: erit propterea quoque [1] nota ratio G B ad G C, aliarumque ſimilium, quæ ſit ut a cognitæ ad e cognitam. Hinc cum G B ſeu A E indefinitè ſumpta exprimatur per x, erit G C itidem indefinitè ſumpta, hoc eſt, omnis diamétri portio inter verticem & ordinatim applicatas intercepta $\infty \frac{ex}{a}$. Quæ cum in latus rectum ducta producere debeat æquationis terminum dx, idem quoque æquationis terminus dx per $\frac{ex}{a}$ diviſus ut prædictum latus rectum reſtituat neceſſe eſt: ac proinde per eandem diviſionem cognoſcitur quæſitum latus rectum æquari $\frac{ad}{e}$. Sumptâ ergo G F $\infty \frac{ad}{e}$ pro latere recto, ſi ad diametrum G C, ut ſupra dictum eſt, deſcribatur Parabola G I D, ſecans rectam A E in I: dico curvam I D fore Locum quæſitum.

[1] per 6. ſexti.

Atque hîc, ut & in aliis ſimilibus exemplis obiter notandum, ſi Parabola deſcripta prædictam A E non ſecaret, id certo indicio fore, quæſtionem propoſitam, per quam legitimâ operatione ad ſupra expreſſam æquationem perventum fuerit, ejus eſſe conditionis, ut Locus ad indagandum propoſitus ſui quidem naturâ

Kk 2 linea

[260] als parabool tevoorschijn komt, maar dat deze toch niet beschreven kan worden als oplossing van het vraagstuk, aangezien de gegeven grootheden niet op de vereiste wijze met elkaar in overeenstemming te brengen zijn [2.8]. Voor het bewijs van het bovenstaande [2.9] nemen we eerst op de kromme *ID* willekeurig een punt, zeg *D*, en trekken we *DE* evenwijdig aan *FG*, die na verlenging de rechte *GB* in *B* snijdt en de middellijn *GC* [2.10] ontmoet in *C* (figuur op blz. [258], vert.). Indien nu *DE* y genoemd wordt, dan zal, omdat *EB* oftewel *AG* gelijk is aan c en omdat $BC = \dfrac{bx}{a}$, gelden dat de gehele *DC* gelijk is aan $y + c + \dfrac{bx}{a}$, dit wil zeggen gelijk aan z.

Aangezien volgens de aard van een parabool het vierkant op *DC* gelijk is aan de rechthoek *FGC* zal ook op grond van het voorafgaande gelden $z^2 = dx$. Dus zal ook na vervanging van z door $y + c + \dfrac{bx}{a}$, en eveneens van d door $\dfrac{2bc}{a} + b$, en nadat men de termen weggelaten heeft die elkaar opheffen omdat zij gelijk zijn, en nadat men ook naar behoren alle termen geordend heeft, gelden

$$y^2 + \frac{2bxy}{a} + 2cy = bx - \frac{b^2x^2}{a^2} - c^2,$$

hetgeen te bepalen en aan te tonen was. Indien echter de vergelijking geweest zou zijn $\quad y^2 - \dfrac{2bxy}{a} - 2cy = bx - \dfrac{b^2x^2}{a^2} - c^2,$

dan zou men met de substitutie volgens de Regel en met een passende berekening op dezelfde vergelijking zijn uitgekomen (nl. $z^2 = dx$, vert.).

Maar omdat volgens de veronderstelling z in dit geval gelijk gesteld moest worden aan $y - \dfrac{bx}{a} - c$, daarom zou ook volgens de eerder gemaakte veronderstellingen de rechte *GB* niet onder maar boven de rechte *AE* getrokken moeten worden, zoals ook *GC* niet onder maar boven *GB* getrokken zou moeten worden en alle overige berekeningen zouden op dezelfde wijze als boven moeten worden uitgevoerd. Indien echter de vergelijking luidt

$$by - \frac{b^2y^2}{a^2} - c^2 = x^2 + \frac{2byx}{a} + 2cx,$$

die de tegenhanger is van de hierboven gegeven vergelijking, dan zal wanneer men volgens de Regel stelt

$$v = x + \frac{by}{a} + c, \text{ gelden } \quad x = v - \frac{by}{a} - \text{c}.$$

Wanneer men deze waarde invult in plaats van x en het kwadraat daarvan in plaats van x^2, de termen schrapt die tegen elkaar wegvallen en alles rangschikt volgens de regels, dan zal de bovenstaande vergelijking de gedaante aannemen $\dfrac{2byx}{a} + by = v^2$, linea Parabolica exiſtat; ſed quòd nulla tamen quæſtioni ſatisfaciens deſcribi poſſit, cum propoſitæ quantitates, eo, ut petitur, modo, conjungi nequeant.

Ad demonſtrationem autem eorum, quæ ſupra dicta ſunt, ſumatur in curva I D punctum utcunque, veluti D, ductâque D E ipſi F G parallelâ, quæ protracta ſecet rectam G B in B, occurratque diametro G C in C, ſi D E vocetur y, cum E B ſeu A G ſit $\infty\, c$, & B C $\infty\, \frac{bx}{a}$, erit tota D C $\infty\, y + c + \frac{bx}{a}$, hoc eſt, z. Cumque ex natura Parabolæ quadratum ex D C ∞ F G C rectangulo, erit quoque ex antedictis $zz \,\infty\, dx$. Ac proinde ſubſtitutis aut reſtitutis $y + c + \frac{bx}{a}$ loco z, itemque $\frac{2bc}{a} + b$ in locum ipſius d, & ablatis quæ propter æqualitatem ſe invicem tollunt, ordinatisque omnibus, ut decet, erit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \,\infty\, bx - \frac{bbxx}{aa} - cc$. Quod determinandum, demonſtrandumque erat.

Sin autem æquatio fuiſſet $yy - \frac{2bxy}{a} - 2cy \,\infty\, bx - \frac{bbxx}{aa} - cc$, factâ aſſumptione ſecundùm Regulam atque operatione uti decet, ad eandem æquationem perventum fuiſſet; ſed quoniam z juxta aſſumptionem eo caſu faciendam fuiſſet æqualis $y - \frac{bx}{a} - c$, idcirco quoque ſuppoſitis, ut ante, rectâ G B non infra ſed ſupra rectam A E, ut & G C non infra ſed ſupra eandem G B ducenda fuiſſet, cæteraque omnia eodem quo ſupra modo fuiſſent expedienda.

Si verò æquatio ſit $by - \frac{bbyy}{aa} - cc \,\infty\, xx + \frac{2byx}{a} + 2cx$, quæ eſt converſa ſuperiùs expoſitæ, aſſumpto juxta Regulam $v \,\infty\, x + \frac{by}{a} + c$, erit $x \,\infty\, v - \frac{by}{a} - c$. Vnde ſubſtituto hoc valore in locum ipſius x, ejuſdemque quadrato loco xx, expunctisque iis, quæ ſe invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis, ſuperior æquatio ſequenti formâ induta erit $\frac{2bc}{a}y + by \,\infty\, vv$, aut (ſi loco $\frac{2bc}{a} + b$ ſubſtituatur d) $dy \,\infty\, vv$. Id quod rurſus arguit æquationem propoſitam reductam eſſe ad formulam prædicti Theorematis V I I converſim, ac proinde Locum quæſitum eſſe Parabolam.

Ad

[260, vervolg]

of (indien men d in plaats van $\frac{2bc}{a}+b$ stelt) $dy = v^2$. Dit toont wederom aan dat de gegeven vergelijking herleid is tot de gedaante van het omgekeerde in Stelling VII en dat dus de gezochte plaats een parabool is.

[261] Voor een gedetailleerde bepaling hiervan nemen we aan dat in de volgende figuur het punt A het onveranderlijke begin is van x en dat deze x, naar wij aannemen, zich onbeperkt uitstrekt vanaf het punt A langs de rechte AE en dat EAH of FAH de gegeven of aangenomen hoek is.

Aangezien het op grond van het tweede deel van Stelling VII duidelijk is dat de genoemde parabool zo beschreven moet worden dat de lijnstukken die geordend zijn aangebracht op de middellijn daarvan, evenwijdig zijn aan AE en dat zij krachtens de gegeven vergelijking gelijk moeten zijn aan de aangenomen grootheid v, dat wil zeggen aan $x + \frac{by}{a} + c$, daarom moet men eerst de rechte GB trekken evenwijdig aan AH, zodanig dat het gedeelte van de rechte EA na verlenging in de richting van A, evenals ook de gedeelten van alle daaraan evenwijdige rechten, zoals AG of HB, gelijk is aan de bekende c.

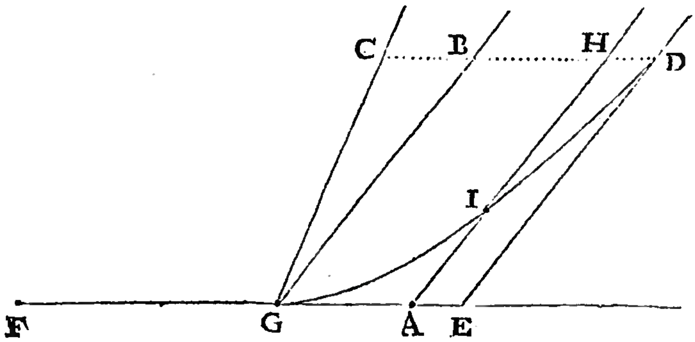
Een willekeurig lijnstuk dat evenwijdig en gelijk is aan AE en dat dus voorgesteld kan worden door x, zoals bijvoorbeeld DH, is hierdoor na verlenging tot GB, zoals bijvoorbeeld DB, gelijk aan $x+c$.

Daarom moet men verder vanuit het punt G de middellijn van de parabool trekken en deze vastleggen volgens dat wat in het voorgaande is uiteengezet, aan de andere kant van GB dan die waar het punt E op de rechte GA ligt (de tekst geeft ten onrechte GC, vert.), zodanig dat (indien GB, onbeperkt verlengd, steeds y genoemd wordt) BC en de stukken van alle andere aan AE evenwijdige rechten tussen GC en de rechte GB uitgedrukt worden door $\frac{by}{a}$.

Zo wordt een willekeurig lijnstuk evenwijdig aan AE, dat als x kan optreden, na verlenging tot GC, zoals DC, gelijk aan $x + c + \frac{by}{a}$, dat wil zeggen gelijk aan v.

Het kwadraat hiervan moet echter gelijk zijn aan het andere lid van de vergelijking, namelijk dy [2.11].

Daarom is het volgende direct duidelijk: indien men een parabool beschrijft op GC als middellijn, Ad cujus ſpecificam determinationem eſto in ſequenti figura ipſius x initium immutabile punctum A, atque eadem x à puncto A per rectam A E indefinitè ſe extendere intelligatur, ſitque da-



tus vel aſſumptus angulus E A H vel F A H. Deinde, quoniam ex ſecunda parte Theorematis VII conſtat, prædictam Parabolam ita eſſe deſcribendam, ut ordinatim applicatæ ad ejus diametrum ſint ipſi A E parallelæ, debeantque juxta æquationem propoſitam æquales eſſe quantitati aſſumptæ v, hoc eſt, $x + \frac{by}{a} + c$, ducenda primùm eſt recta G B ipſi A H parallela, ita ut pars rectæ E A, versùs A productæ, ut & omnium ipſi æquidiſtantium, velut A G vel H B ſit ∞ c cognitæ. Quo facto, cum quævis recta, quæ poſſit eſſe ipſi A E æquidiſtans & æqualis, ac proinde exprimi per x, ut, verbi gratiâ, D H, ad rectam G B producta; uti D B, æquetur $x + c$: ita porrò è puncto G ducenda, &, ſecundùm ea, quæ in præcedentibus explicata ſunt, conſtituenda eſt Parabolæ diameter ab adverſa parte ipſius G B, quàm eſt punctum E in recta G C, ut, ſi G B indefinitè vocetur y, B C, aliarumque omnium ipſi A E parallelarum inter eandem G C & rectam G B interceptæ partes exprimantur per $\frac{by}{a}$. Atque ita quælibet recta ipſi A E parallela, quæ poſſit eſſe x ad rectam G C producta, veluti D C, ſit ∞ $x + c + \frac{by}{a}$, hoc eſt, v. Cujus quidem quadratum cum æquale eſſe debeat alteri æquationis termino, nempe, dy: ſtatim apparet, ſi Parabola deſcripta foret ad diametrum G C,

[262] waarvan de rechte zijde GF zodanig is gekozen dat de rechthoeken ingesloten door deze rechte zijde en de delen van de middellijn tussen de top G en de geordend aangebrachte lijnstukken, gelijk zijn aan dy, dan zal deze parabool de gezochte plaats zijn. Maar, omdat de verhouding van het lijnstuk GB tot het lijnstuk BC (en die van de andere overeenkomstige lijnstukken) bekend is, namelijk als a staat tot b, en omdat eveneens de hoek daartussen bekend is (deze is immers gelijk aan de gegeven of aangenomen hoek EAH), daarom[1] zal ook de verhouding van GB tot GC en van de andere overeenkomstige lijnstukken bekend zijn; wij stellen deze op de verhouding van de bekende a tot een bekende e. Indien we GB of ED, die we onbeperkt veronderstellen, door y voorstellen, dan zal dus GC eveneens onbeperkt verondersteld, ofwel ieder deel van de middellijn tussen de top en de geordend aangebrachte rechten, gelijk zijn aan $\frac{ey}{a}$. Dit moet, na vermenigvuldiging met de rechte zijde, de term dy van de vergelijking geven; daarom moet ook deze zelfde term dy van de vergelijking, na deling door $\frac{ey}{a}$ zoals hiervoor vermeld, de rechte zijde weer opleveren. Wanneer men deze deling uitvoert, dan zal dus blijken dat het quotiënt de rechte zijde $\frac{ad}{e}$ is. Wanneer men dus $GF = \frac{ad}{e}$ als rechte zijde neemt en met de gevonden GC als middellijn, zoals hierboven gezegd is, de parabool GID beschrijft, die de rechte AH in I snijdt, dan beweer ik dat de kromme ID de gezochte plaats zal zijn [2.12]. Wanneer men immers daarop een willekeurig punt neemt, zeg D, en DE evenwijdig trekt aan AH, alsook DC evenwijdig aan AE, welke rechte DC de rechten AH en GB snijdt in de punten H en B en de middellijn GC in het punt C, dan zal gelden

$$AE = x = DH;\ ED = y = GB;\ AG = HB = c;\ BC = \frac{by}{a}$$

en dus geldt voor de gehele DC:

$$DC = x + c + \frac{by}{a} \text{ en dat is } v.$$

Aangezien op grond van de aard van een parabool de rechthoek FGC gelijk is aan het vierkant op DC, daarom zal na vermenigvuldiging van $\frac{ad}{e}$ met $\frac{ey}{a}$ en na vermenigvuldiging van v met zichzelf, gelden: $dy = v^2$ [2.13]. Wanneer men $x+c+\frac{by}{a}$ in plaats stelt van v en dit weer invoert, en evenzo $\frac{2bc}{a} + b$ in plaats van d, de termen schrapt die tegen elkaar wegvallen omdat zij gelijk zijn en alle termen naar behoren rangschikt, dan verkrijgt men

$$by - \frac{b^2y^2}{a^2} - c^2 = x^2 + \frac{2byx}{a} + 2cx.$$

---

[1] VI, 6.

cujus latus rectum G F ita esset assumptum, ut rectangula contenta sub eodem latere recto & diametri portionibus, inter verticem G & ordinatim applicatas interceptis, forent ∞ dy, eandem illam Parabolam fore Locum quæsitum. At verò cum ratio rectæ G B ad rectam B C aliarumque similium cognita sit, nimirum, ut a ad b; sitque itidem notus angulus sub iisdem comprehensus, utpote æqualis dato vel assumpto E A H: erit quoque [1] ratio ipsius G B ad G C aliarumque similium cognita, quæ sit ut a cognita ad c cognitam. Quocirca si G B sive E D indefinitè sumpta exprimatur per y, erit G C itidem indefinitè sumpta, hoc est, omnis diametri portio, inter verticem & ordinatim applicatas intercepta ∞ $\frac{cy}{a}$. Quæ cum in latus rectum ducta producere debeat æquationis terminum dy, idem quoque æquationis terminus dy per $\frac{cy}{a}$ divisus ut prædictum latus rectum restituat necesse est. ac proinde factâ eâdem divisione indicabit quotiens latus rectum quæsitum fore $\frac{ad}{e}$. Hinc, sumptâ G F ∞ $\frac{ad}{e}$ pro latere recto, si ad diametrum G C inventam, ut supra dictum est, describatur Parabola G I D, secans rectam A H in I: dico curvam I D fore Locum quæsitum.

[1] per 6 sexti.

Sumpto enim in eadem puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi A H, ut & D C ipsi A E parallelâ, quæ quidem D C secet rectas A H & G B in punctis H & B, occurratque diametro G C in puncto C: erit A E ∞ x ∞ D H; E D ∞ y ∞ G B; A G & H B ∞ c; B C ∞ $\frac{by}{a}$ ideoque tota D C ∞ $x + c + \frac{by}{a}$, hoc est, v. Cumque ex natura Parabolæ rectangulum F G C sit æquale quadrato D C: erit, factâ multiplicatione $\frac{ad}{e}$ in $\frac{cy}{a}$, atque v in se ipsam, $dy \infty vv$. Et substitutis aut restitutis $x + c + \frac{by}{a}$ loco v, itemque $\frac{2bc}{a} + b$ in locum ipsius d, atque ablatis quæ propter æqualitatem se invicem tollunt, ordinatisque omnibus, ut decet, $by - \frac{bbyy}{aa} - cc \infty xx + \frac{2byx}{a} + 2cx$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

De cæteris autem casibus, ad prædictam formulam spectantibus, supervacuum fuerit plura exponere, cum ex prædictis facilè expli-

[262, vervolg]
Hetgeen te bepalen en te bewijzen was. Het zou echter overbodig zijn nader in te gaan op de overige gevallen die betrekking hebben op de genoemde formule, daar deze uit het voorgaande gemakkelijk
[263] uiteengezet, bepaald en bewezen kunnen worden; men behoeft slechts te letten op het verschil in stand van de lijnen, dat het noodzakelijke gevolg is van het verschil tussen de tekens + en − . Een tweede reden is dat ik alle gevallen van soortgelijke plaatsen later uiteen zal zetten aan de hand van een algemene Regel [2.14].

Voorbeelden van de herleiding van vergelijkingen tot de gedaante van Stelling VIII.

Indien de vergelijking luidt

$$y^2 - \frac{bxy}{a} = -\frac{b^2x^2}{4a^2} + bx + d^2,$$

dan moet men volgens de algemene Regel stellen

$$z = y - \frac{bx}{2a}$$

en dan geldt $y = z + \dfrac{bx}{2a}$.

Indien men dit stelt in plaats van y, het kwadraat daarvan in plaats van y^2, de termen weglaat die tegen elkaar wegvallen en alles op de gebruikelijke wijze ordent, dan zal de bovenstaande vergelijking de volgende gedaante aannemen:

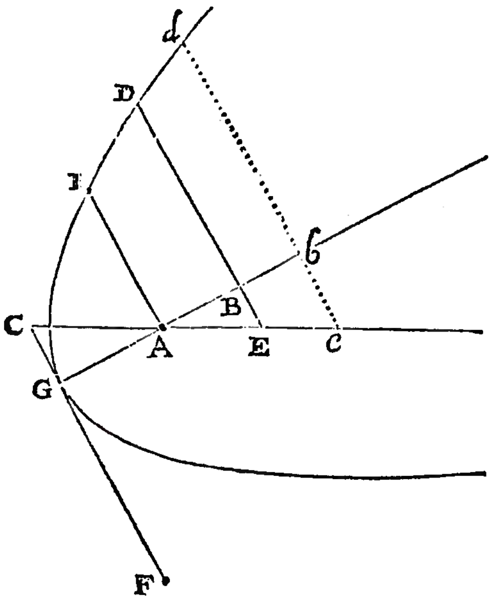
$$z^2 = bx + d^2.$$

Hieruit blijkt dat deze herleid is tot de vorm van Stelling VIII en dat dus de gezochte plaats een parabool is.
Voor een nauwkeurige beschrijving daarvan nemen we aan dat in de bijgevoegde figuur het punt A het onveranderlijke begin is van x en dat deze x vanaf het genoemde punt A zich volgens onderstelling onbeperkt uitstrekt

explicari, determinari, ac demonſtrari queant; obſervatâ ſolummodo diverſâ linearum poſitione, quæ ex ſignorum + & — differentia oriri debet, cumque omnes ſimilium locorum caſus mox per generalem Regulam ſim exhibiturus.

Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis VIII.

Si æquatio ſit $yy - \frac{bxy}{a} \infty - \frac{bbxx}{4aa} + bx + dd$, aſſumpto juxta Regulam $z \infty y - \frac{bx}{2a}$, erit $y \infty z + \frac{bx}{2a}$. quo ſubſtituto in locum ipſius y, & ejuſdem quadrato loco yy, omiſſiſque iis, quæ ſe invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis, æquatio ſuperior ſequenti formâ erit induta: $zz \infty bx + dd$.



Vnde apparet, eandem eſſe reductam ad formulam Theorematis VIII, ac proinde Locum quæſitum eſſe Parabolam. Ad cujus particularem deſcriptionem eſto in adjuncta figura ipſius x initium immutabile punctum A, atque eadem x à dicto puncto A per

[264] langs de rechte AE. Laat ook de gegeven of aangenomen hoek die y en x insluiten, gelijk zijn aan de hoek AED.

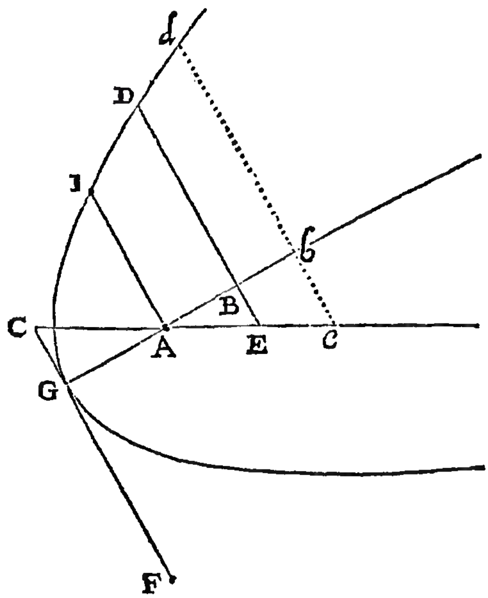
Aangezien $z = y - \frac{bx}{2a}$ moet men als volgt te werk gaan: indien we onderstellen dat y uitsteekt boven de rechte AE, zoals ED, dan moet men ook nog boven de rechte AE vanuit het punt A de lijn AB trekken zó dat de verhouding van AE tot EB gelijk is aan die van de bekende $2a$ tot de bekende b.

Dit betekent dat AE , oftewel x, staat tot EB zoals $2a$ staat tot b en dan zal $EB = \frac{bx}{2a}$.

Hetzelfde moeten we veronderstellen aangaande alle andere lijnstukken die evenwijdig zijn aan EB en tussen AE en AB begrepen zijn. Deze zullen elk voor zich gelijk zijn aan $\frac{bx}{2a}$.

Hierdoor zou, zoals uit het hierboven opgemerkte blijkt – bij het ontbreken van de term d^2 in de vergelijking – de genoemde AB middellijn zijn van een parabool, de top daarvan het punt A en, indien we de verhouding van AE tot AB stellen op die van $2a$ tot e, dan zou daarbij behorende rechte zijde gelijk zijn aan $\frac{2ab}{e}$ [2.15].

Omdat de rechthoek die ingesloten wordt door de rechte zijde en dat deel van de middellijn dat ligt tussen de top en de geordend aangebrachte rechten, gelijk moet zijn aan $bx + d^2$, daarom is verder het volgende duidelijk: indien men onder dezelfde onderstellingen de middellijn per rectam A E indefinitè se extendere intelligatur, sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo A E D. Deinde, quoniam $z \infty y - \frac{bx}{2a}$, si y supra lineam A E exsurgere intelligatur, veluti E D, ducenda quoque est supra lineam A E ex puncto A recta A B, ita ut eadem sit ratio A E ad E B, quæ est ipsius $2a$ cognitæ ad b cognitam, hoc est, ut sit uti $2a$ ad b, ita A E seu x ad E B, eritque E B ∞ $\frac{bx}{2a}$. idem intellige de omnibus aliis rectis ipsi E B parallelis, atque inter A E & A B interceptis, quæ quidem singulæ ipsi $\frac{bx}{2a}$ erunt æquales. Hinc,



quemadmodum ex supra dictis patet, si terminus dd in æquatione deficeret, prædicta A B Parabolæ diameter foret, ejusque vertex punctum A, &, positâ ratione A E ad A B, ut $2a$ ad e, latus rectum ipsi correspondens esset ∞ $\frac{2ab}{e}$. Iam verò cum rectangulum, quod sub latere recto & portione diametri, inter verticem atque ordinatim applicatas interceptâ, continetur, æquale esse debeat $bx + dd$: manifestum est, si, iisdem positis, diameter

A B

[265] AB verlengt in de richting van A tot G, zodat de rechthoek ingesloten door de genoemde rechte zijde en het deel GA, gelijk is aan d^2, dan zal de lijn GB de gezochte middellijn zijn en de top van de parabool daarop is het genoemde punt G. Daarom zal ook d^2 na deling door de genoemde rechte zijde, dat is na deling door $\frac{2ab}{e}$, gelijk zijn aan de lengte van GA en dus zal GA gelijk zijn aan $\frac{d^2e}{2ab}$.

Indien men dus met middellijn GB en met rechte zijde GF $(=\frac{2ab}{e})$ onder de gegeven hoek de parabool GDd beschrijft, die AI, die evenwijdig is aan ED, snijdt in I, dan beweer ik dat de kromme IDd de gezochte plaats is.

Ook hier moet echter terloops opgemerkt worden dat de genoemde top G ook op de volgende wijze gevonden kan worden: als namelijk EA verlengd wordt tot C, zodanig dat $AC = \frac{d^2}{b}$ en indien vervolgens door het punt C evenwijdig aan DE de lijn CG getrokken wordt die het verlengde van AB snijdt in G, dan zal in dit zelfde snijpunt de gezochte top liggen [2.16].

Bewijs. Neem op de genoemde kromme willekeurig een punt aan, zeg D, en trek onder de hoek AED die gelijk is aan de gegeven of aangenomen hoek, een lijn DE die de middellijn GB snijdt in B; op grond van de constructie geldt dan

$$BE = \frac{bx}{2a}$$

en daarom zal, indien we ED y noemen, gelden:

$$DB = y - \frac{bx}{2a} \text{ oftewel } z;\ FG = \frac{2ab}{e};\ GA = \frac{d^2e}{2ab};\ AB = \frac{ex}{2a}$$

en de gehele $GB = \frac{d^2e}{2ab} + \frac{ex}{2a}$.

Maar omdat op grond van de eigenschap van een parabool het vierkant op DB gelijk is aan de rechthoek FGB, daarom zal, na vermenigvuldiging van z met zichzelf en van $\frac{2ab}{e}$ met $\frac{d^2e}{2ab} + \frac{ex}{2a}$, gelden $z^2 = d^2 + bx$.

Door $y - \frac{bx}{2a}$ in plaats van z te stellen, verkrijgt men dus

$$y^2 - \frac{bxy}{a} + \frac{b^2x^2}{4a^2} = bx + d^2,$$

dat wil zeggen

$$y^2 - \frac{bxy}{a} = -\frac{b^2x^2}{4a^2} + bx + d^2.$$

Hetgeen te bewijzen was.

A B versùs A producatur ad G, ita ut rectangulum ſub prædicto latere recto & parte G A contentum ſit $\infty\ dd$, rectam G B quæſitam fore diametrum, ejuſque verticem prædictum G punctum: ac proinde & dd per prædictum latus rectum, hoc eſt per $\frac{2ab}{c}$, diviſum æquari longitudini G A, ideoque G A fore $\infty\ \frac{ddc}{2ab}$. Quare ſi diametro G B & latere recto G F $\infty\ \frac{2ab}{c}$ in dato angulo Parabola deſcribatur G D d, ſecans A I ipſi E D parallelam in I: dico curvam I D d fore Locum quæſitum.

Verùm obiter hîc quoque notandum venit, prædictum verticem G etiam inveniri hoc pacto: ſi nempe E A producatur ad C, ita ut A C ſit $\infty\ \frac{dd}{b}$, ac deinde per punctum C ipſi D E parallela ducatur C G, occurrens productæ A B in G: erit enim in eodem illo concurſus puncto vertex quæſitus.

Demonſtratio.

Sumatur in prædicta curva punctum utcunque, veluti D, ductâque D E in angulo A E D, dato vel aſſumpto æquali, ſecante diametrum G B in B: erit, ex conſtructione, B E $\infty\ \frac{bx}{2a}$; ideoque ſi E D vocetur y, erit D B $\infty\ y - \frac{bx}{2a}$ ſeu z; F G $\infty\ \frac{2ab}{c}$, G A $\infty\ \frac{ddc}{2ab}$; A B $\infty\ \frac{cx}{2a}$, totaque G B $\infty\ \frac{ddc}{2ab} + \frac{cx}{2a}$. At cum ex proprietate Parabolæ D B quadratum ſit æquale rectangulo F G B, erit, factâ multiplicatione ipſius z in ſe ipſam, atque $\frac{2ab}{c}$ in $\frac{ddc}{2ab} + \frac{cx}{2a}$, $zz \infty dd + bx$. Vnde ſubſtituto $y - \frac{bx}{2a}$ loco z, obtinebitur $yy - \frac{bxy}{a} + \frac{bbxx}{4aa} \infty bx + dd$, id eſt, $yy - \frac{bxy}{a} \infty - \frac{bbxx}{4aa} + bx + dd$. Quod erat demonſtrandum.

Quomodo autem pro caſu hujus exempli converſo Parabola deſcribenda ſit, ex comparatione ejuſdem cum antedictis facile eſt colligere.

Si æquatio fuerit $\frac{bcy}{a} + by - \frac{bbyy}{aa} + \frac{1}{4}cc \infty xx + \frac{2byx}{a} - cx$,

[265, vervolg]
Hoe men echter in het omgekeerde geval van dit voorbeeld [2.17] de parabool kan beschrijven, valt gemakkelijk op te maken door dit voorbeeld te vergelijken met wat hiervoor is opgemerkt.
Indien de vergelijking zou zijn

$$\frac{bcy}{a} + by - \frac{b^2y^2}{a^2} + \frac{c^2}{4} = x^2 + \frac{2byx}{a} - cx,$$

[266] dan geldt, indien men volgens de regel stelt

$$v = x + \frac{by}{a} - \frac{c}{2}, \text{ dat } x = v - \frac{by}{a} + \frac{c}{2}.$$

Indien men dit invult in plaats van x en het kwadraat ervan in plaats van x^2, die termen weglaat die tegen elkaar wegvallen en alles op de gebruikelijke wijze rangschikt, dan zal de bovenstaande vergelijking de volgende gedaante aannemen

$$by + \frac{c^2}{2} = v^2.$$

Hieruit blijkt dat deze herleid is tot de gedaante van genoemde Stelling VIII (het omgekeerde geval) en dat dus de gezochte plaats een parabool is.

Teneinde deze in detail te bepalen zal het voldoende zijn deze kort te schetsen met behulp van bijgevoegde figuur, aangezien deze bepaling als het ware vanzelf voortvloeit uit wat tevoren uiteengezet is.
Hierbij is verondersteld dat (zoals in de bijgevoegde figuur) AE willekeurig is aangenomen als een onbekende grootheid x en dat deze met een andere grootheid y een hoek maakt die gelijk is aan de hoek EAC of aan het supplement daarvan.

Bepaling van de Plaats

AE stelt, onbeperkt voortgezet, de grootheid x voor. ED en alle daaraan evenwijdige lijnstukken stellen y voor. $AK = \frac{c}{2} = CH$ omdat KH evenwijdig is aan AC [2.18].

KH, oftewel y, staat tot HB zoals a staat tot b, zodat $HB = \frac{by}{a}$ en

$$DB = x - \frac{c}{2} + \frac{by}{a} = v.$$

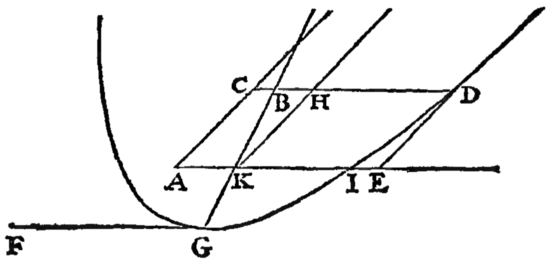
Dan geldt: KH, oftewel y, staat tot KB zoals a staat tot e, zodat KB (waarop de middellijn ligt) gelijk is aan $\frac{ey}{a}$.Na deling door $\frac{ey}{a}$ geeft by als uitkomst $\frac{ab}{e}$; daarom is de rechte zijde FG gelijk aan $\frac{ab}{e}$ [2.19]. De term in de vergelijking die geen onbekenden bevat, namelijk $\frac{c^2}{2}$, geeft aſſumpto juxta Regulam $v \propto x + \frac{by}{a} - \frac{1}{2}c$, erit $x \propto v - \frac{by}{a} + \frac{1}{2}c$. quo ſubſtituto in locum ipſius x, ejuſdemque quadrato loco xx, ablatisque iis, quæ ſe invicem deſtruunt, atque omnibus ritè ordinatis, æquatio ſuperior ſequenti formâ erit induta.

$$by + \frac{1}{2}cc \propto vv.$$

Vnde apparet eandem eſſe reductam ad formulam prædicti Theorematis V I I I converſim, ac proinde Locum quæſitum eſſe Parabolam. Cujus ſpecifica determinatio (ſuppoſitis, ut in adjuncta figura, A E indefinitè aſſumptam eſſe quantitatem incognitam x, atque cum altera y conſtituere angulum æqualem angulo E A C vel ejuſdem ad binos rectos ſupplemento) quoniam ex jam ante explicatis quaſi ſponte profluit, idcirco eam adjunctâ figurâ breviter indicaſſe ſuffecerit.

Determinatio Loci.

A E indefinitè $\propto x$.
E D omnesque ipſi parallelæ $\propto y$.
A K $\propto \frac{1}{2}c \propto$ C H, quia K H parallela A C.



Vt a ad b, ita K H ſeu y ad H B: unde H B fit $\propto \frac{by}{a}$, & D B $\propto x - \frac{1}{2}c + \frac{by}{a} \propto v$.

Vt a ad e, ita K H ſeu y ad K B: unde K B (in qua diameter) fit $\propto \frac{ey}{a}$.

by diviſum per $\frac{ey}{a}$, reddit $\frac{ab}{e}$: unde latus rectum F G fit $\propto \frac{ab}{e}$.

$\frac{1}{4}cc$, nempe terminus æquationis in totum cognitus, diviſus per $\frac{ab}{e}$

[267] na deling door $\frac{ab}{e}$, de rechte zijde immers, als uitkomst $\frac{c^2e}{2ab}$, zodat

$$KG = \frac{c^2e}{2ab} \text{ en } GB = \frac{c^2e}{2ab} + \frac{ey}{a}.$$

Bewijs. De rechthoek *FGB* is gelijk aan het vierkant op *BD*, dus $\frac{c^2}{2} + by = v^2$

ofwel $by = v^2 - \frac{c^2}{2}$, dat wil zeggen

$$by = x^2 + \frac{2byx}{a} + \frac{b^2y^2}{a^2} - cx - \frac{bcy}{a} + \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{2}.$$

Wanneer men dan schrapt wat geschrapt moet worden en een passende rangschikking toepast, ontstaat dus

$$\frac{bcy}{a} + by - \frac{b^2y^2}{a^2} + \frac{c^2}{4} = x^2 + \frac{2byx}{a} - cx.$$

Hetgeen gesteld was.

Voorbeeld van de herleiding van vergelijkingen tot de gedaante van Stelling IX.

Laat de vergelijking zijn

$$y^2 + \frac{bxy}{a} - cy = ax - \frac{b^2x^2}{4a^2} - c^2.$$

Indien men volgens de Regel stelt

$$z = y + \frac{bx}{2a} - \frac{c}{2}, \text{ dan zal } y = z - \frac{bx}{2a} + \frac{c}{2}.$$

Stelt men dit in plaats van y en het kwadraat daarvan in plaats van y^2, dan worden de termen van de vergelijking als volgt:

$$z^2 = ax - \frac{bcx}{2a} - 3\frac{c^2}{4}.$$

Laten wij gemakshalve d schrijven in plaats van $a - \frac{bc}{2a}$, waarbij we a groter dan $\frac{bc}{2a}$ onderstellen. De vergelijking wordt dan $z^2 = dx - 3\frac{c^2}{4}$ en blijkt dan herleid te zijn tot de gedaante van Stelling IX. Daarom is de gezochte plaats een parabool die op grond van wat reeds uiteengezet is, zeer gemakkelijk te bepalen en te beschrijven is [2.20], zoals uit de volgende figuur en uit datgene wat hierboven in het kort is opgemerkt, begrepen kan worden.

Bepaling van de plaats

Laat het punt A het onveranderlijke begin zijn van x [2.21].

$\frac{ab}{c}$, nempe per latus rectum, reddit $\frac{cce}{2ab}$: unde K G fit $\propto \frac{cce}{2ab}$, atque G B $\propto \frac{cce}{2ab} + \frac{ey}{a}$.

Demonstratio.

Rectangulum F G B $\propto$ B D quadrato, ergo $\frac{1}{2}cc + by \propto vv$, vel $by \propto vv - \frac{1}{2}cc$, hoc est, $by \propto xx + \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa} - cx - \frac{bcy}{a} + \frac{1}{4}cc$.
$- \frac{1}{2}cc$.

Quocirca deletis delendis, factâque decenti transpositione, fiet $\frac{bcy}{a} + by - \frac{bbyy}{aa} + \frac{1}{4}cc \propto xx + \frac{2byx}{a} - cx$. Quod erat propositum.

Exemplum reductionis æquationum ad formulam Theorematis IX.

Sit æquatio $yy + \frac{bxy}{a} - cy \propto ax - \frac{bbxx}{4aa} - cc$. Assumatur juxta Regulam $z \propto y + \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}c$, eritque $y \propto z - \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}c$. Quo substituto in locum ipsius y, & ejus quadrato loco yy, fient æquationis termini, ut sequitur: $zz \propto ax - \frac{bcx}{2a} - \frac{3}{4}cc$. Facilitatis ergo pro $a - \frac{bc}{2a}$ scribatur d, supponendo a esse majorem quàm $\frac{bc}{2a}$, eritque æquatio $zz \propto dx - \frac{3}{4}cc$. Et apparet eandem reductam esse ad formulam Theorematis IX, ac propterea Locum quæsitum esse Parabolam, quàm ex iis, quæ jam explicata sunt, determinare ac describere facillimum erit; ut ex sequenti figura iisque quæ super eâdem breviter annotata sunt, colligere licebit.

Determinatio Loci.

Sit initium immutabile ipsius x punctum A.
A E indefinitè $\propto x$.
E D omnesque ipsi parallelæ $\propto y$.
E A K vel A E D, angulus quem x & y comprehendere debent.

[267, vervolg]
AE stelt, onbeperkt voortgezet, de grootheid x voor.
ED en alle daaraan evenwijdige lijnstukken stellen de grootheid y voor.
EAK of AED is de hoek die x en y met elkaar moeten insluiten.

[268] $AK = \frac{c}{2}$.
KH is evenwijdig aan AE.
KH, oftewel x, staat tot HB zoals $2a$ staat tot b, dus $HB = \frac{bx}{2a}$.
KH, oftewel x, staat tot KB zoals $2a$ staat tot e, dus KB (waarop de middellijn ligt) is gelijk aan $\frac{ex}{2a}$.

dx geeft na deling door $\frac{ex}{2a}$ als uitkomst $\frac{2ad}{e}$, zodat de rechte zijde, die we aangeven met FG, gelijk is aan $\frac{2ad}{e}$.

$\frac{3c^2}{4}$ geeft na deling door $\frac{2ad}{e}$, $\frac{3c^2e}{8ad}$, zodat KG gelijk wordt aan $\frac{3c^2e}{8ad}$ en

$$GB = \frac{ex}{2a} - \frac{3c^2e}{8ad}.$$

Dus: indien een parabool beschreven wordt met GB als middellijn en rechte zijde FG, gaande door G als top en KH snijdend in I, dan zal ID de gezochte plaats zijn.

Bewijs. Laat het punt D willekeurig aangenomen zijn op ID en laat DE evenwijdig getrokken zijn aan AK. Indien we deze (DE, vert.) y noemen, dan zal

$$HD = y - \frac{c}{2}$$

en $$DB = y - \frac{c}{2} + \frac{bx}{2a} = z.$$

Omdat het vierkant hierop gelijk is aan de rechthoek FGB, zal gelden

$$z^2 = dx - \frac{3c^2}{4}.$$

Dit wil zeggen

$$y^2 - cy + \frac{c^2}{4} + \frac{bxy}{a} - \frac{bcx}{2a} + \frac{b^2x^2}{4a^2} = ax - \frac{bcx}{2a} - \frac{3c^2}{4}.$$

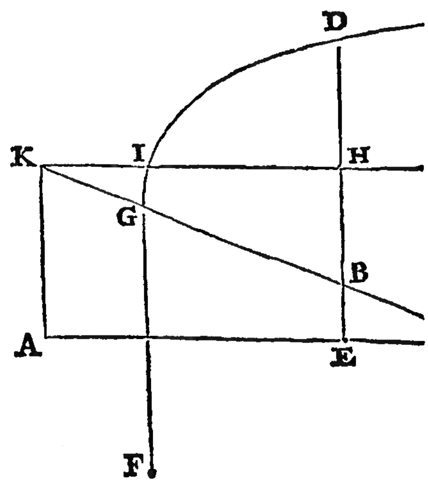
en dus krijgt men, indien aan beide kanten gelijke termen worden geschrapt en de termen op de gebruikelijke wijze worden gerangschikt,

$$y^2 + \frac{bxy}{a} - cy = ax - \frac{b^2x^2}{4a^2} - c^2.$$

$AK \infty \frac{1}{2}c$.

KH parallela ipsi AE.

Vt $2a$ ad b, ita KH seu x ad HB: unde HB erit $\infty \frac{bx}{2a}$.



Vt $2a$ ad e, ita KH seu x ad KB: unde KB (in quâ diameter) $\infty \frac{cx}{2a}$.

dx divisum per $\frac{cx}{2a}$, reddit $\frac{2ad}{e}$: unde latus rectum, quod sit FG, erit $\infty \frac{2ad}{c}$.

$\frac{3}{4}cc$ divisum per $\frac{2ad}{c}$, reddit $\frac{3ccc}{8ad}$: unde KG fit $\infty \frac{3cce}{8ad}$, atque GB $\infty \frac{cx}{2a} - \frac{3cce}{8ad}$.

Hinc si GB diametro & latere recto FG per verticem G descripta sit Parabola, secans KH in I, erit ID Locus quæsitus.

Demonstratio.

Esto punctum D utcunque sumptum in ID, & DE ducta parallela ipsi AK, quæ si vocetur y; erit HD $\infty y - \frac{1}{2}c$, ac DB $\infty y - \frac{1}{2}c + \frac{bx}{2a}$, hoc est, z. Cujus quadratum cum æquetur rectangulo FGB, erit $zz \infty dx - \frac{3}{4}cc$, hoc est, $yy - cy + \frac{1}{4}cc + \frac{bxy}{a} - \frac{bcx}{2a} + \frac{bbxx}{4aa} \infty ax - \frac{bcx}{2a} - \frac{3}{4}cc$. Ac proinde, si utrinque demantur æquales, terminique ritè transponantur, habebitur $yy + \frac{bxy}{a} - cy \infty ax - \frac{bbxx}{4aa} - cc$. Quod erat propositum.

Atque hujus quidem exempli conversum, ut & cæteros casus huc spectantes, ex iis, quæ jam dicta sunt, simili modo reducere atque resolvere non difficile erit.

Exem-

[268, vervolg]

Hetgeen gesteld was. Het zal echter niet moeilijk zijn het omgekeerde [2.22] van dit voorbeeld op soortgelijke wijze te herleiden en op te lossen met behulp van wat reeds gezegd is zoals ook de overige gevallen die hierop betrekking hebben.

[269] Voorbeelden van de herleiding van vergelijkingen tot de gedaante van Stelling X.

Wanneer de vergelijking luidt $ay - y^2 = bx$ of, wat hetzelfde is, $y^2 - ay + bx = 0$ en wij volgens de Regel stellen $z = y - \frac{a}{2}$, dan zal gelden $y = z + \frac{a}{2}$.

Indien we dit in plaats stellen van y en het kwadraat daarvan in plaats van y^2, dan blijft over $z^2 = \frac{a^2}{4} - bx$. Hieruit blijkt dat deze vergelijking is herleid tot het geval van Stelling X en dat dus op grond van wat daar bewezen is, de gezochte plaats een parabool is.

Voor een gedetailleerde bepaling daarvan nemen we aan dat in de bijgevoegde figuur het punt A het onveranderlijke begin is van x en dat deze x zich onbeperkt uitstrekt vanaf A in de richting van E. Laat verder de gegeven of aangenomen hoek die y en x insluiten gelijk zijn aan de hoek EAK of aan het supplement daarvan.

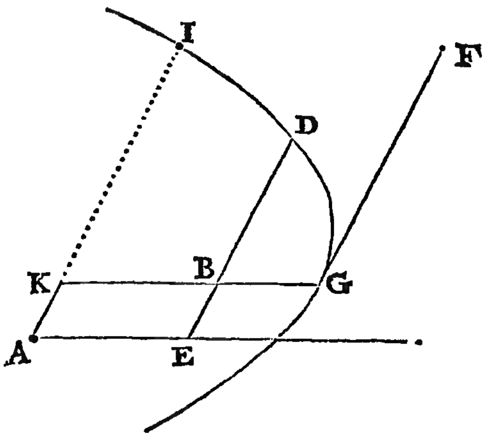
Omdat z gesteld is op $y - \frac{a}{2}$, moeten we – indien we aannemen dat y boven de rechte AE uitsteekt – daarboven (d.w.z. boven AE, vert.) ook de rechte KG trekken, evenwijdig aan AE, zodanig dat AK en alle daaraan evenwijdige lijnstukken die afgesneden worden tussen AE en KG gelijk zijn aan $\frac{a}{2}$.

Na deze voorbereiding geldt het volgende: indien volgens de Regel KG gelijk gemaakt wordt aan $\frac{a^2}{4b}$ en deze (KG, vert.) gekozen wordt als middellijn van een parabool, waarbij de daarop geordend aangebrachte rechten evenwijdig zijn aan AK, terwijl de rechte zijde FG gelijk is aan b, dan zal het gedeelte GDI daarvan (dat wil zeggen van deze parabool, vert.) dat ligt tussen de top G en het verlengde van AK de gezochte plaats zijn [2.23].

Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis X.

Si æquatio ſit $ay - yy \infty bx$, ſive, quod idem eſt, $yy - ay + bx \infty 0$, aſſumpto juxta Regulam $z \infty y - \frac{1}{2}a$, erit $y \infty z + \frac{1}{2}a$. Quo ſubſtituto in locum ipſius y, & ejuſdem quadrato loco yy, remanebit $zz \infty \frac{1}{4}aa - bx$. Vnde apparet, eandem eſſe reductam ad caſum Theorematis X, ideoque per ea, quæ ibidem ſunt demonſtrata, Locum quæſitum eſſe Parabolam.

Ad cujus ſpecificam determinationem eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile punctum A, eademque x ſe indefinitè ab A versùs E extendere intelligatur; ſit autem datus vel aſſumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A K,



aut ipſius ad binos rectos complemento. Deinde, quoniam z aſſumpta eſt $\infty y - \frac{1}{2}a$, ſi y ſupra rectam A E exurgere intelligatur, ducenda quoque eſt ſupra ipſam recta K G ipſi A E parallela, ita ut A K omneſque ipſi æquidiſtantes inter A E & K G interceptæ ſint $\infty \frac{1}{2}a$. Quo facto, ſi juxta Regulam fiat K G $\infty \frac{aa}{4b}$, eademque ſumatur pro Parabolæ diametro, ad quam ordinatim applicatæ ſint ipſi A K parallelæ, cujuſque latus rectum F G ſit ∞b: erit ipſius portio deſcripta G D I, quæ inter verticem G & productam A K intercipitur, Locus quæſitus.

[270] Indien men immers op de kromme *GDI* willekeurig een punt aanneemt, zeg *D*, en *DE* trekt evenwijdig aan *AK*, die (*DE*, vert.) de middellijn *KG* in *B* snijdt en indien men deze *DE* y noemt, dan zal $DB = y - \frac{a}{2}$ oftewel z, en *GB*, oftewel $GK - KB$, is gelijk aan $\frac{a^2}{4b} - x$.

Omdat op grond van de eigenschap van een parabool het vierkant op BD gelijk is aan de rechthoek FGB, zal dus gelden

$$z^2 = \frac{a^2}{4} - bx, \text{ dat wil zeggen}$$

$$y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - bx,$$

of $\quad y^2 - ay + bx = 0$, of ook $ay - y^2 = bx$.

Hetgeen te bewijzen was.

Indien de vergelijking geweest zou zijn

$$\frac{b^2y^2}{a^2} + dy - c^2 = \frac{2byx}{a} - x^2$$

of, wat hetzelfde is,

$$x^2 - \frac{2byx}{a} + \frac{b^2y^2}{a^2} + dy - c^2 = 0,$$

dan geldt, indien men volgens de Regel stelt $v = x - \frac{by}{a}$:

$$x = v + \frac{by}{a}.$$

Wanneer men dit in plaats van x invult en het kwadraat daarvan in plaats van x^2, dan ontstaat, wanneer alles op de gebruikelijke wijze is geordend,

$$c^2 - dy = v^2.$$

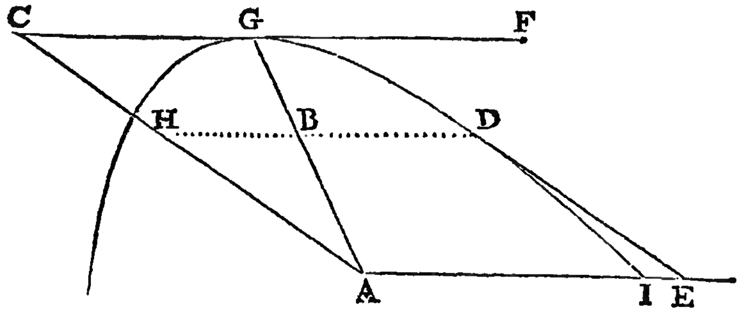
Hieruit blijkt dat het geval van het omgekeerde van Stelling X zich voordoet en dat dus de gezochte plaats een parabool is.

Om deze in detail te beschrijven gaan we uit van het punt *A* dat het onveranderlijke begin is van x, die volgens onderstelling zich onbeperkt uitstrekt vanaf *A* in de richting van *E*; ook nemen we aan dat de gegeven of aangenomen hoek die y en x insluiten, gelijk is aan de hoek *EAH* of het supplement daarvan.

Vervolgens nemen we op *AH* het lijnstuk $AC = \frac{c^2}{d}$ en trekken we vanuit *C* de rechte *CF*, evenwijdig aan *AE* en daarop nemen we *CG* zodanig dat dit staat tot *CA*

Etenim assumpto in curva G D I puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi A K parallelâ, quæ secet diametrum K G in B, si eadem D E vocetur y: erit D B ∞ $y - \frac{1}{2}a$ seu z, ac G B sive G K — K B ∞ $\frac{aa}{4b} - x$. Hinc, cum ex natura Paraboles quadratum ex B D sit æquale rectangulo F G B, erit $zz \infty \frac{1}{4}aa - bx$, hoc est, $yy - ay + \frac{1}{4}aa \infty \frac{1}{4}aa - bx$, sive $yy - ay + bx \infty 0$, sive etiam $ay - yy \infty bx$. Quod erat propositum.

Si æquatio fuerit $\frac{bbyy}{aa} + dy - cc \infty \frac{2byx}{a} - xx$, sive, quod idem est, $xx - \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa} + dy - cc \infty 0$: assumpto juxta Regulam $v \infty x - \frac{by}{a}$, erit $x \infty v + \frac{by}{a}$. Quo substituto in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, fiet, omnibus ritè ordinatis, $cc - dy \infty vv$. Vnde apparet casum esse Theorematis X conversim, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Quæ quidem ut specificè describatur, esto ipsius x initium immutabile A punctum, intelligaturque eadem x se extendere ab A versùs E indeterminatè, sitque angulus datus vel assumptus, quem y



& x comprehendunt, æqualis angulo E A H aut ipsius ad duos rectos complemento. Deinde sumatur in A H recta A C $\infty \frac{cc}{d}$, ducaturque ex C recta C F ipsi A E parallela, atque in eadem sumptâ C G, quæ se habeat ad C A, ut cognita b ad a cognitam, hoc est, ut sit uti a ad b, ita A C ad C G, agatur A G, eaque pro diametro Parabolæ sumatur, quæ per verticem G versùs A erit describenda. Porrò cum in triangulo A C G ob rationem cognitam laterum

A C,

[270, vervolg]
zoals de bekende b staat tot de bekende a, dat wil zeggen zodanig dat AC staat tot CG zoals a staat tot b.

Vervolgens trekken we AG en nemen deze als middellijn van de parabool die met G als top in de richting van A beschreven moet worden. In de driehoek ACG is verder de verhouding bekend van de zijden

[271] AC en CG, die de bekende hoek C insluiten (deze hoek is immers gelijk aan de gegeven of aangenomen hoek of het supplement daarvan); daarom is eveneens de verhouding bekend van AC tot AG. Laat deze zijn als die van a tot e.

Daarom zal verder, omdat AC immers gelijk is aan $\frac{c^2}{d}$, gelden $AG = \frac{c^2 e}{ad}$. Indien men de geheel bekende term van de vergelijking, namelijk c^2, hierdoor deelt, zal $\frac{ad}{e}$ de rechte zijde blijken te zijn [2.24]. Dus zal ook, indien men stelt $GF = \frac{ad}{e}$, GF de rechte zijde van de gezochte parabool zijn, behorende bij de middellijn GA.

Indien men met de genoemde middellijn en met de genoemde rechte zijde een parabool beschrijft, zeg GDI, die AE in I snijdt, dan beweer ik dat de kromme IDG de gezochte plaats is.

Wanneer men immers daarop willekeurig een punt aanneemt, zeg D, DE trekt evenwijdig aan AH, en DBH evenwijdig aan AE, en deze DE noteert als y, dan geldt ook $AH = y$. Omdat ook AH staat tot HB zoals AC staat tot CG (dat is als a tot b), daarom is HB gelijk aan $\frac{by}{a}$ en dus geldt, omdat DH oftewel AE gelijk is aan x,

$$DB = x - \frac{by}{a} \text{ oftewel } v.$$

Omdat AH, oftewel y, staat tot AB zoals AC staat tot AG, dat is zoals a staat tot e, daarom zal evenzo gelden $AB = \frac{ey}{a}$ en $GA - AB$ (oftewel GB) $= \frac{c^2 e}{ad} - \frac{ey}{a}$.

Op grond van de aard van een parabool is de rechthoek FGB gelijk aan het vierkant op BD; daarom volgt uit het voorafgaande, wanneer men FG oftewel $\frac{ad}{e}$ vermenigvuldigt met GB (of $\frac{c^2 e}{ad} - \frac{ey}{a}$), en BD, oftewel v, met zichzelf vermenigvuldigt, dat $c^2 - dy = v^2$.

Dit betekent, wanneer men weer $x - \frac{by}{a}$ invult in plaats van v,

$$c^2 - dy = x^2 - 2\frac{byx}{a} + \frac{b^2 y^2}{a^2}$$

of

$$\frac{b^2 y^2}{a^2} + dy - c^2 = 2\frac{byx}{a} - x^2.$$

AC, CG, cognitum angulum C comprehendentium, utpote dato vel assumpto aut ejusdem ad duos rectos supplemento æqualem, cognita item sit ratio, quam habet AC ad AG, quæ sit ut a ad e; erit, AC existente $\infty \frac{cc}{d}$, AG $\infty \frac{cce}{ad}$. Per quam si terminus æquationis, in totum cognitus, nimirum cc, dividatur, orietur $\frac{ad}{e}$ pro latere recto. Ac proinde si fiat GF $\infty \frac{ad}{e}$, erit GF latus rectum quæsitæ Parabolæ, diametro GA correspondens; atque iccirco si ad dictam diametrum, dictumque latus rectum Parabola describatur, ut GDI, secans AE in I: dico IDG curvam esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductisque DE ipsi AH, ac DBH ipsi AE parallelis, si eadem DE exprimatur per y, erit quoque AH $\infty\, y$. Cumque sit ut AC ad CG, id est, ut a ad b, ita AH ad HB: erit HB $\infty \frac{by}{a}$, ideoque cum DH seu AE sit $\infty\, x$, erit DB $\infty\, x - \frac{by}{a}$ seu v. Similiter cum sit ut AC ad AG, hoc est, ut a ad e, ita AH seu y ad AB: erit AB $\infty \frac{ey}{a}$, & GA — AB seu GB $\infty \frac{cce}{ad} - \frac{ey}{a}$. Hinc cum ex natura Paraboles rectangulum FGB sit æquale quadrato ex BD, erit, factâ multiplicatione ipsius FG seu $\frac{ad}{e}$ in GB seu $\frac{cce}{ad} - \frac{ey}{a}$, & ipsius BD seu v in se ipsam, $cc - dy \infty vv$. Hoc est, restituto $x - \frac{by}{a}$ loco v, erit $cc - dy \infty xx - \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa}$, vel $\frac{bbyy}{aa} + dy - cc \infty \frac{2byx}{a} - xx$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

Obiter autem & hîc notandum, ut ex antedictis quoque facile est colligere, aliter etiam diametrum GA atque latus rectum GF indagari potuisse, hoc modo:

Cum AH indeterminatè sit $\infty\, y$, juxta primum Theorema hujus ita ducatur AG, ut recta HB, quemadmodum & quælibet alia ipsi AE parallela, quæ inter AH & AG intercipitur, sit $\infty \frac{by}{a}$; ponaturque ratio, quæ est inter AH & AB similesque, ut a ad e: ideoque cum AB indeterminatè sit $\infty \frac{ey}{a}$, terminus æquationis dy

per

[271, vervolg]
Hetgeen te bepalen en te bewijzen was
Terloops moet echter ook hier nog opgemerkt worden dat het ook gemakkelijk is uit het voorgaande op te maken dat de middellijn *GA* en de rechte zijde *GF* nog op een andere wijze opgespoord hadden kunnen worden en wel op de volgende manier:
Omdat *AH* zonder beperking gelijk is aan y, trekken we in overeenstemming met de eerste Stelling van dit boek, *AG* zó dat het lijnstuk *HB* gelijk is aan $\frac{by}{a}$, zoals ook elk willekeurig ander lijnstuk dat evenwijdig is aan *AE* en begrepen is tussen *AH* en *AG*.
De verhouding tussen *AH* en *AB* en tussen overeenkomstige lijnstukken, stellen we op a tot e; aangezien *AB* zonder beperking gelijk is aan $\frac{ey}{a}$, zal de term dy van de vergelijking

[272] na deling hierdoor, laten zien dat de rechte zijde *FG* van de kegelsnede (sic!) gelijk is aan $\frac{ad}{e}$.
Evenzo geeft de term c^2 van de vergelijking na deling door de genoemde rechte zijde oftewel $\frac{ad}{e}$, het quotiënt $\frac{c^2e}{ad}$ voor de gezochte *AG* [2.25].
Het zou overbodig zijn om hier meer voorbeelden toe te voegen, aangezien ik van plan ben later alle mogelijke gevallen, zonder uitzondering, door middel van een algemene regel te beschrijven en uiteen te zetten [2.26].

Verder nog het volgende: wij hebben weliswaar de Regels die in het eerste hoofdstuk uiteengezet zijn, daar niet met afzonderlijke voorbeelden of denkbeeldige gevallen toegelicht en achten dit noch hier noch in het vervolg op enigerlei wijze noodzakelijk, immers iedereen die de Regels zelf goed begrepen heeft kan deze gemakkelijk toepassen op willekeurige voorgelegde voorbeelden of denkbeeldige gevallen.
Aangezien wij echter in het eerste boek enkele belangrijke eigenschappen van de parabool, de hyperbool en de ellips met opzet achterwege gelaten hebben, met de gedachte dat deze in dit boek op de juiste plaatsen bij wijze van vraagstukken zeer terecht gesteld en opgelost zouden kunnen worden en tegelijkertijd als bijzondere voorbeelden van de genoemde Regels zouden kunnen gelden, daarom zullen wij de behandeling daarvan hier en aan het einde van het volgende hoofdstuk toevoegen.

Vraagstuk I

Propositie 11

Bij een gegeven punt en rechte lijn in het vlak dat door beide is aangebracht, een ander punt te bepalen zodanig dat de twee lijnstukken, vanuit dit punt per eandem divisus ostendet latus rectum sectionis F G $\infty \frac{ad}{e}$. Similiter terminus æquationis cc per prædictum latus rectum seu $\frac{ad}{c}$ divisus dabit quotientem $\frac{ccc}{ad}$ pro quæsita A G.

Plura hîc exempla subjungere supervacuum foret, cum mox omnes omnino casus possibiles generali regulâ annotare ac demonstrare animus sit.

Porrò quamvis Regulas capite primo explicatas particularibus ibidem exemplis seu casibus in hypothesi non illustraverimus, neque etiam id aut hîc aut in sequentibus ullo modo necessarium ducamus, quippe cum unusquisque, qui Regulas ipsas rectè perceperit, easdem quibuslibet propositis exemplis seu casibus in hypothesi facilè applicare valeat: quandoquidem tamen libro primo insignes quasdam proprietates Parabolæ, Hyperbolæ, atque Ellipsis consultò prætermisimus, eâ mente, ut in hoc libro suis locis per modum Problematum non incongruè proponi ac demonstrari, simulque tanquam propositarum Regularum particularia exempla haberi possent, earundem explicationem hîc & sub finem sequentis capitis subjiciemus.

PROBLEMA I.

Propositio 11.

Datis puncto & lineâ rectâ, in plano per utrumque ducto aliud punctum invenire, à quo binæ rectæ, altera ad datum punctum, altera ad datam lineam perpendiculariter ductæ, sibi invicem sint æquales: & quoniam infinita sunt ejusmodi puncta, quæ quæstioni satisfaciunt, Locum determinare ac describere, in quo cuncta & singula reperiantur.

Sit datum punctum A, & data positione recta linea B C, oporteatque in plano quod per utrumque ducitur, aliud punctum invenire,

[272, vervolg]
respectievelijk getrokken naar het gegeven punt en loodrecht op de gegeven lijn, onderling gelijk zijn; en, omdat er oneindig veel van soortgelijke punten zijn die aan deze vraag voldoen, de plaats te bepalen en te beschrijven waarop al deze punten stuk voor stuk zich bevinden.

Laat het gegeven punt A zijn en de rechte lijn die in ligging gegeven is, BC en laat de opgave zijn een ander punt te vinden in het vlak dat door beide aangebracht is,
[273] zoals D, zodanig dat de getrokken lijnstukken DA en DF, waarvan het laatste verondersteld wordt loodrecht te staan op de gegeven BC, onderling gelijk zijn.
Trek eerst de loodlijn AE en noem die a. Laten de beide lijnstukken EF en FD, die onbekend en onbepaald zijn en de gegeven rechte hoek EFD insluiten, volgens de regel als bekend en bepaald verondersteld worden.
Het eerste daarvan, EF, wordt x genoemd en het laatste, FD, wordt y genoemd. Indien we veronderstellen dat bovendien AG evenwijdig getrokken is aan EF, dan zal in de rechthoekige driehoek AGD de basis AD gelijk zijn aan y, omdat deze immers gelijk is aan DF die we getrokken hebben; de zijde AG echter, of het lijnstuk EF, is gelijk aan x en GD, oftewel $(FD - AE)$ (indien het punt G valt tussen D en F), dan wel $(AE - FD)$ (indien het punt D valt tussen F en G), is gelijk aan $|y - a|$ [2.27].
Omdat het kwadraat van de basis gelijk is aan de som van de kwadraten van de zijden, zal de vergelijking dus luiden

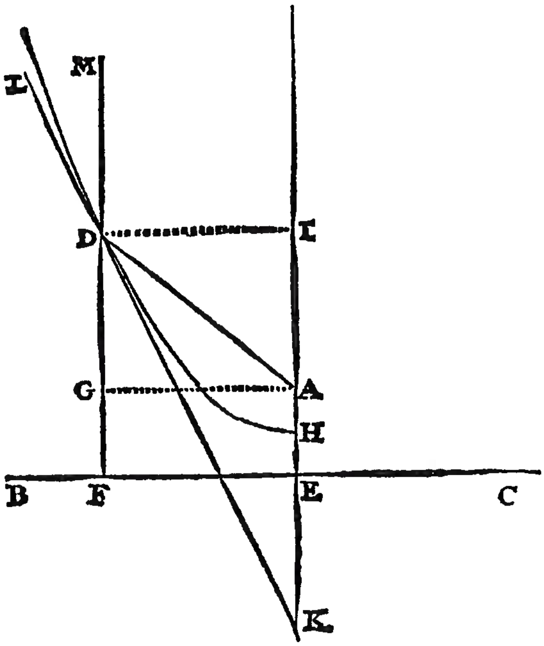
$$y^2 = x^2 + y^2 - 2ay + a^2,$$

dat wil zeggen, als men de termen schrapt die tegen elkaar wegvallen en alles op de gebruikelijke wijze rangschikt,

$$2ay - a^2 = x^2.$$

Dit is echter het geval van de negende Stelling van dit boek (het omgekeerde geval) en dus zal de gezochte plaats een parabool zijn.

nire, quemadmodum D; ita ut ductæ rectæ D A, D F, quarum hæc ad datam B C intelligitur perpendicularis, sibi invicem æquales sint.



Ductâ perpendiculari A E, quæ vocetur a, ac suppositis juxta Regulam binis lineis E F, F D incognitis atque indeterminatis datum angulum rectum E F D comprehendentibus tanquam cognitis ac determinatis, quarum prior E F vocetur x, ac posterior F D nominetur y; si ducta præterea intelligatur A G ipsi E F æquidistans, erit in triangulo rectangulo A G D basis A D $\infty\, y$, utpote ∞ ductæ D F; latus verò A G seu recta E F $\infty\, x$, & G D, sive (si punctum G cadat inter D & F) F D — A E, aut (si punctum D inter F & G cadat) A E—F D $\infty\, y \sqsubset a$. Vnde, cum quadratum basis æquale sit binis laterum quadratis simul sumptis, æquatio erit $yy \infty\, xx + yy - 2ay + aa$, hoc est, ablatis iis quæ se invicem destruunt, omnibusque ritè ordinatis, erit $2ay - aa \infty\, xx$. Qui quidem casus est Theorematis noni hujus libri conversim, ac proinde Locus quæsitus erit linea Parabolica. Quare si juxta

 ea,

[274] Indien men dan volgens wat daar uiteengezet is, vanuit *E* de rechte *EI* trekt, onbeperkt voortlopend, evenwijdig aan *FD*, en daarvan aftrekt het lijnstuk $EH = \frac{a^2}{2a}$, dat is $\frac{a}{2}$, dan moet men een parabool beschrijven met middellijn op de genoemde *EI* (welke middellijn echter ook de as is omdat de hoek *EFD* recht is), met de top in *H* en met parameter $2a$. Vandaar zal het, op grond van wat in het eerste hoofdstuk van het eerste boek uiteengezet is, zeer gemakkelijk zijn om de parabool zelf te beschrijven.

Aangezien verder het punt *A* op de as hetzelfde is wat algemeen het brandpunt of umbilicaal punt genoemd wordt [2.28], omdat het immers op een afstand van de top *H* ligt die gelijk is aan het vierde deel van de parameter, daarom is het duidelijk dat wat nu volgt, terecht kan worden geconcludeerd uit het voorafgaande.

Gevolg 1

Het lijnstuk dat vanaf het brandpunt getrokken wordt naar een willekeurig punt op de parabool, is gelijk aan het deel van de as [2.29] dat afgesneden wordt door de lijn die vanaf datzelfde punt geordend is aangebracht, verlengd met een vierde deel van de parameter.

Op grond van het voorgaande is het volgende immers duidelijk: indien men op de kromme willekeurig een punt *D* aanneemt en daardoor *DI* geordend aanbrengt op de as, dan is het lijnstuk *DA* gelijk aan de loodlijn *DF*, dat wil zeggen gelijk aan het lijnstuk *IE*, het deel immers van de as dat door de aangebrachte rechte *DI* wordt afgesneden en dat door de top *H* heen verlengd is met de afstand $HE = \frac{a}{2}$ dat wil zeggen met een vierde van de parameter.

Gevolg 2

Op grond van het voorgaande is het volgende ook duidelijk: indien men dezelfde veronderstellingen maakt als hierboven en *FD* verlengt, zeg tot *M*, en door het aangenomen punt *D* de raaklijn trekt, zeg *LDK*, dan is de hoek *FDK* ofwel *MDL* gelijk aan de hoek *ADK*.

Laat immers de raaklijn *LDK* het verlengde van de as snijden in *K*, dan zal[1] ook het lijnstuk *IH* gelijk zijn aan *HK* [2.30] en dus is (wanneer men de onderling gelijke *HE* en *AH* aan beide kanten bijtelt) het lijnstuk *IE*, dat is *AD*, gelijk aan *AK*; en dus[2] is ook de hoek *ADK* noodzakelijkerwijze gelijk aan de hoek *AKD*, dat wil zeggen gelijk aan de hoek *FDK* of *MDL* [2.31].

---

[1]gevolg 2 van prop. 2, Lib. I, bladz. [174] (de tekst vermeldt ten onrechte: gevolg 1); [2] I, 5.

ea, quæ ibidem expoſita ſunt, ex E ducatur recta E I indefinitè extenſa atque ipſi F D æquidiſtans; & ab eadem auferatur recta E H $\infty \frac{aa}{2a}$, id eſt, $\frac{1}{2}a$: erit deſcribendæ Parabolæ diameter in dicta E I, (quæ quidem diameter axis quoque eſt, propter angulum E F D rectum) vertex autem in H, ac parameter ∞ 2 a. Vnde, per ea quæ libri primi capite primo expoſita ſunt, Parabolam ipſam deſcribere facillimum erit. Cumque porrò axis punctum A, utpote quod ab H vertice diſtat quartâ ipſius parametri parte, id ipſum ſit, quod vulgò Parabolæ Focus ſeu Vmbilicus nuncupatur, apparet ex præmiſſis rectè inferri, quæ ſequuntur.

Corollarium 1.

Quæ ab Vmbilico ad quodlibet Parabolæ punctum recta ducitur æqualis eſt axis portioni per applicatam ab eodem puncto abſciſſæ & quadrante parametri per verticem productæ.

Conſtat enim ex antedictis rectam A D, utcunque aſſumptum fuerit in curva punctum D, ſi per idem illud ad axem ordinatim applicata ſit D I, æqualem eſſe perpendiculari D F, hoc eſt, rectæ I E, nempe axis portioni, per applicatam D I abſciſſæ, & per verticem H, longitudine H E $\infty \frac{1}{2}a$, id eſt, quadrante parametri, productæ.

Corollarium 2.

Manifeſtum quoque eſt ex antedictis, ſi poſitis quæ ſupra, & productâ F D, uti ad M, per aſſumptum punctum D contingens ducta ſit, ut L D K, angulum F D K ſive M D L angulo A D K æqualem eſſe.

[1] per 1. Cor. 2 primi hujus. *[2] per 5 primi.*

Occurrat enim contingens L D K axi producto in K, eritque [1] recta I H ipſi H K, ideoque (æqualibus H E, A H utrinque additis) recta I E, hoc eſt, A D, ipſi A K æqualis; ac proinde [2] & angulus A D K angulo A K D, hoc eſt, angulo F D K ſive M D L æqualis ſit neceſſe eſt.

[275]

Hoofdstuk III

In het derde geval dat hierboven werd vermeld [3.1], namelijk dat waarbij elk van beide onbekende grootheden in de tweede macht voorkomt of waarbij de ene vermenigvuldigd met de andere in de vergelijking voorkomt, terwijl de vergelijking niet tot een eenvoudiger gedaante herleid kan worden, zal men uitkomen op één van de volgende gedaanten :

I. $yx = f^2$.

II. $\dfrac{ly^2}{g} = x^2 - f^2$.

III. $y^2 - f^2 = \dfrac{lx^2}{g}$.

IV. $\dfrac{ly^2}{g} = f^2 - x^2$. [3.2]

STELLING XI

Propositie 12

Indien de vergelijking luidt $yx = f^2$ dan is de gezochte plaats een hyperbool.

Laat immers, zoals in het voorgaande, het onveranderlijke beginpunt van x het punt A zijn en laat deze zelfde x verondersteld worden zich onbeperkt uit te strekken langs de rechte AE en laat de gegeven of aangenomen hoek die y en x insluiten, gelijk zijn aan de hoek EAB of aan het supplement daarvan.
Laat vervolgens op de rechte AE het stuk $AC = f$ gekozen worden en laat CG getrokken worden, daaraan gelijk, en evenwijdig aan AB. Wanneer dan ook[1] door het punt G en,

[1]Op grond van wat behandeld is in de gevolgen van de proposities 11 en 12 (Lib. I, blz. [201]) evenals in het laatste hoofdstuk van Liber Primus.

CAPUT III.

TErtio autem casu supra expresso, cùm nempe quantitatum incognitarum utraque ad quadratum ascendit, sive altera in alteram ducta in æquatione reperitur, neque æquatio ad terminos magis simplices reduci potest, ad aliquam sequentium formularum deventum erit;

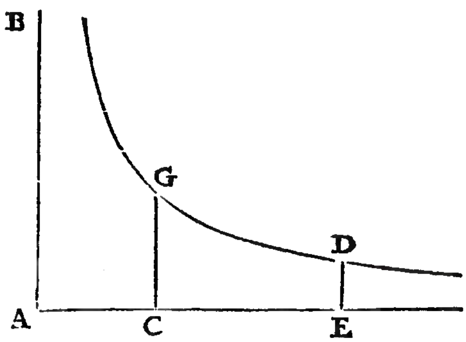
$$\text{I. } yx \infty ff.$$
$$\text{II. } \frac{lyy}{g} \infty xx - ff.$$
$$\text{III. } yy - ff \infty \frac{lxx}{g}.$$
$$\text{IV. } \frac{lyy}{g} \infty ff - xx.$$

THEOREMA XI.

Propositio 12.

Si æquatio sit $yx \infty ff$, Locus quæsitus est Hyperbola.

Sit enim, ut in præcedentibus, ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem illa x per rectam A E indefinitè se extendere intelligatur; sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A B, aut ejusdem ad binos rectos supplemento. Deinde sumatur in A E recta A C ∞f, ducaturque C G eidem æqualis ac ipsi A B parallela, descriptâque [1] per punctum G at-



Mm 2 que

[1] *per ea quæ in Corol. ad* 11 & 12, *nec non cap. ult. lib. primi hujus tradita sunt.*

[276] met asymptoten *AE* en *AB*, de hyperbool *GD* beschreven is, dan beweer ik dat de kromme *GD* de gezochte plaats is.

Laat immers op deze kromme een punt willekeurig worden aangenomen, zeg *D*, en laat *DE* evenwijdig aan *AB* getrokken worden, dan zal op grond van de aard van een hyperbool[1] de rechthoek *AED* gelijk zijn aan de rechthoek *ACG*, dat wil zeggen gelijk aan het vierkant op *AC*. Dus zal, wanneer *AE* aangenomen wordt als de onbekende grootheid x en indien *ED* y genoemd wordt, gelden: $yx = f^2$
Hetgeen te bepalen en te bewijzen was.

STELLING XII

Propositie 13

Indien de vergelijking luidt $\frac{ly^2}{g} = x^2 - f^2$, dan zal de gezochte plaats een hyperbool zijn.

Er geldt immers dat l gelijk of ongelijk is aan g en indien deze daaraan gelijk is, dan zal de bovenstaande vergelijking dezelfde zijn alsof er stond $y^2 = x^2 - f^2$ (het moge voldoende zijn dit slechts eenmaal te vermelden).
Het volgende blijkt ook duidelijk: indien het onveranderlijke beginpunt van x het punt A is en indien deze x verondersteld wordt zich onbeperkt uit te strekken langs de lijn *AE* vanaf A in de richting van E en indien de gegeven of aangenomen hoek die y en x insluiten gelijk is aan de hoek *AGF*, dan zal – indien zowel *AG* als *AC* gelijk gemaakt worden aan de bekende f en *GF* gelijk aan *GC* genomen wordt en een hyperbool, zeg *GD*, beschreven[2] wordt met A als middelpunt en met transversale middellijn *CG*, die gelijk is aan de rechte zijde of de parameter *GF* – juist deze kromme *GD* de gezochte plaats zijn [3.3].

Wanneer men immers daarop een willekeurig punt aanneemt, zeg *D*, en *DE* evenwijdig aan *FG* trekt, dan zal op grond van de aard van een hyperbool[3] het vierkant op *DE* gelijk zijn aan de rechthoek *CEG* omdat *CG* en *GF* volgens onderstelling gelijk zijn.

---

[1]prop. 3, Lib. I, blz. [180] en [181]; [2]op grond van datgene wat is aangetoond in het laatste hoofdstuk van Liber Primus (prop. 10, blz. [196], vert.); [3]prop. 10, Lib. I, blz. [196].

que Aſymptotis A E, A B Hyperbolâ G D: dico curvam G D eſſe Locum quæſitum.

Sumatur enim in eadem curva punctum utcunque, veluti D, ductâque D E ipſi A B parallelâ, erit ex natura Hyperboles [1] rectangulum A E D rectangulo A C G, hoc eſt, quadrato ex A C æquale. Hinc, cum A E ſit aſſumpta pro incognita quantitate x, ſi E D vocetur y, erit $yx \infty ff$. Quod determinandum, demonſtrandumque erat.

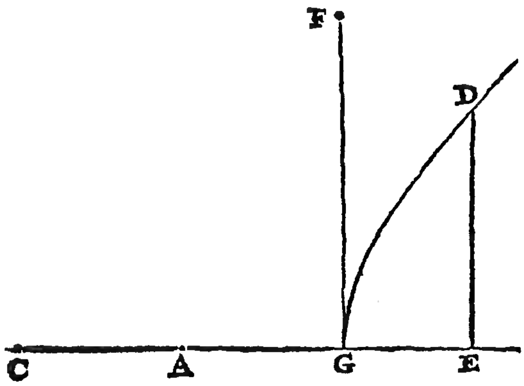
[1] per 3 primi hujus.

THEOREMA XII.

Propoſitio 13.

Si æquatio ſit $\frac{lyy}{g} \infty xx - ff$, erit Locus quæſitus linea Hyperbolica.

Aut enim l ipſi g æqualis eſt aut inæqualis, & ſi æqualis ſit, erit ſuperior æquatio eadem ac ſi eſſet $yy \infty xx - ff$ (quod ſemel monuiſſe ſufficiat). Ac facilè apparet, ſi ipſius x initium immutabile ſit punctum A, atque eadem x ſe in linea A E ab A versùs E indefinitè extendere intelligatur, ſitque angulus datus vel aſſumptus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo A G F, quòd ſi tam A G quàm A C fiant ∞f cognitæ, ac G F ſumatur ∞ G C, centroque A, & transverſâ diametro C G ipſi G F lateri recto ſive parametro æquali deſcribatur [2] Hyperbola, ut G D, eandem curvam G D fore Locum quæſitum.



Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipſi F G parallelâ, erit [3] ex natura Hyperboles, cùm C G & G F ſupponantur æquales, quadratum ex D E æquale rectangulo

C E G

[2] per ea quæ cap. ult. primi hujus oſtenſa ſunt.

[3] per 10 primi hujus.

[277] Indien dan *DE* y genoemd wordt, zal dus gelden $y^2 = x^2 - f^2$ omdat volgens onderstelling *CE* oftewel $AE + AC$ gelijk is aan $x + f$, en *GE* oftewel $AE - AG$ gelijk is aan $x - f$.

Maar indien l en g ongelijk zijn, dan blijkt duidelijk dat $x^2 - f^2$ staat tot y^2 zoals l staat tot g.
Indien, naast wat hierboven verondersteld werd, niet langer de parameter *GF* gelijk is aan de transversale middellijn *CG*, maar de transversale middellijn *CG* staat tot de parameter *GF* zoals l staat g en al het overige gelijk is, dan zal dus op dezelfde wijze aan het gevraagde voldaan zijn.
Immers staat, op grond van de aard van een hyperbool[1], het vierkant op *ED* tot de rechthoek *CEG* zoals *FG* staat tot *GC*, dit wil zeggen: y^2 staat tot $x^2 - f^2$ zoals g staat tot l en dus zal, indien we deze verhouding herleiden tot een gelijkheid, gelden dat $ly^2 = gx^2 - gf^2$. En dus zal, indien we elk lid van deze gelijkheid delen door g, gelden:

$$\frac{ly^2}{g} = x^2 - f^2.$$

Hetgeen te bepalen en te bewijzen was.

STELLING XIII
Propositie 14

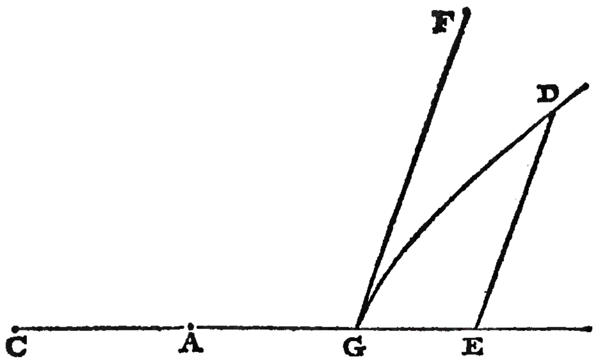
Indien de vergelijking luidt $y^2 - f^2 = \frac{lx^2}{g}$, dan zal de gezochte plaats een hyperbool zijn [3.4].

Laat voor een nauwkeurige bepaling daarvan in bijgevoegde figuur het punt A het onveranderlijke begin zijn van x en laten we veronderstellen dat deze x zich vanaf A

[1] prop. 10, Lib. I, blz. [196].

CEG. Hinc, si DE vocetur y, cum ex hypothesi CE seu AE $+$ AC sit $\propto x+f$, & GE sive AE $-$ AG $\propto x-f$, erit $yy \propto xx-ff$.

At verò si l & g sint inæquales, apparet esse, ut l ad g, ita $xx-ff$ ad yy. Ac proinde si juxta ea, quæ supra exposita sunt, non jam parameter GF diametro transversæ CG æqualis, sed ut l ad g,



ita fiat transversa diameter CG ad GF parametrum, cæteraque omnia, ut supra, eodem modo quæsito erit satisfactum.

Est enim [1] ex natura Hyperboles, ut FG ad GC, ita ED quadratum ad CEG rectangulum, hoc est, ut g ad l, ita yy ad $xx-ff$, unde, revocando proportionem ad æqualitatem, erit $lyy \propto gxx-gff$. Ac proinde si utraque hujus æqualitatis pars dividatur per g, erit $\frac{lyy}{g} \propto xx-ff$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

[1] per 10 primi hujus.

THEOREMA XIII.

Propositio 14.

Si æquatio sit $yy-ff \propto \frac{lxx}{g}$, erit Locus quæsitus Hyperbola.

Ad cujus determinationem specificam esto in apposita figura ipsius x initium immutabile punctum A, ipsaque x se ab A versùs

[278] langs de lijn AE onbeperkt uitstrekt naar E en laat de hoek die y en x insluiten gelijk zijn aan de hoek EAG of het supplement daarvan.
Indien nu zowel AG als AC gelijk aan de bekende f genomen worden en de verhouding van CG tot GF gelijk gekozen wordt aan de verhouding van l tot g (hierbij moet GF evenwijdig aan AE getrokken worden) en indien vervolgens met middelpunt A, met transversale middellijn CG en parameter GF de hyperbool GD beschreven wordt, dan is het hierna direct duidelijk, omdat $y^2 - f^2$ staat tot x^2 zoals l staat tot g, dat deze kromme GD de gezochte plaats zal zijn.

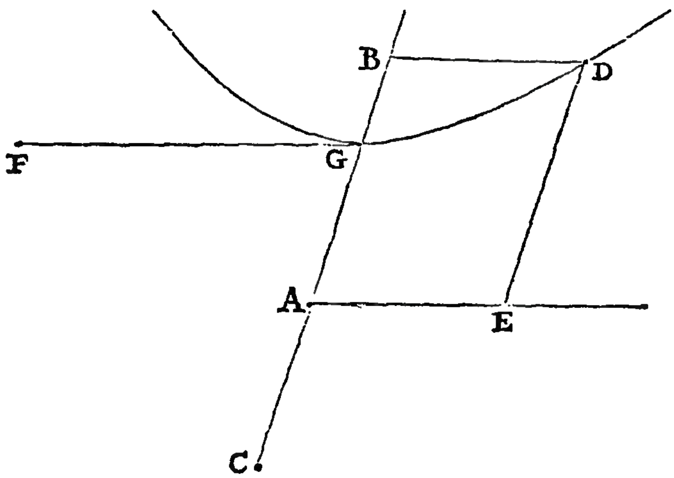
Indien men namelijk daarop willekeurig een punt kiest, zeg D, en DE evenwijdig trekt aan AG en DB evenwijdig aan AE en men DE y noemt, dan zal CB, dat is $DE + AC$, gelijk zijn aan $y + f$, en BG, oftewel $DE - AG$, gelijk aan $y - f$ en daarom zal de rechthoek CBG gelijk zijn aan $y^2 - f^2$.
Verder dit: omdat[1] op grond van de aard van een hyperbool de rechthoek CBG staat tot het vierkant op DB of AE, d.w.z. $y^2 - f^2$ staat tot x^2, zoals CG staat tot GF, dat is, volgens onderstelling, zoals l staat g, daarom geldt $gy^2 - gf^2 = lx^2$, hetgeen betekent

$$y^2 - f^2 = \frac{lx^2}{g} \quad [3.3].$$

Hetgeen te bewijzen en te bepalen was.

[1] prop. 10, Lib. I, blz. [196].

E in linea AE indefinitè extendere intelligatur, sitque angulus quem y & x comprehendunt æqualis angulo E A G aut ejusdem ad duos rectos supplemento. Deinde, cum sit ut l ad g, ita $yy-ff$



ad xx, statim apparet, si tam A G quam A C sumantur æquales f cognitæ, fiatque ut l ad g, ita C G ad G F (quæ quidem G F sit ipsi A E parallela), ac postea centro A, transversâ diametro C G, & parametro G F Hyperbola describatur G D, eandem curvam G D fore Locum quæsitum.

Sumpto namque in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi A G, ac D B ipsi A E parallelâ, si eadem D E vocetur y, erit C B, hoc est, D E + A C, $\infty\ y+f$; & B G, sive D E — A G, $\infty\ y-f$, ideoque C B G rectangulum $\infty\ yy-ff$. Dein cum [1] ex natura Hyperbolæ sit ut C G ad G F, hoc est, ex hypothesi ut l ad g, ita rectangulum C B G ad D B sive A E quadratum, id est, ita $yy-ff$ ad xx: erit $gyy-gff\ \infty\ lxx$, hoc est, $yy-ff\ \infty\ \frac{lxx}{g}$ Quod demonstrandum, determinandumque erat.

[1] per 10 primi hujus.

THEO-

[279]

STELLING XIV

Propositie 15

Indien de vergelijking luidt $\frac{ly^2}{g} = f^2 - x^2$, dan zal de gezochte plaats een ellips zijn [3.5].

Omdat echter het soort ellips waarvan de rechte zijde en de dwarse zijde gelijk zijn, terwijl tevens de hoek die de geordend aangebrachte rechten met de middellijn maken, recht is, een cirkelomtrek is, daarom is het duidelijk dat in het onderhavige geval de gezochte plaats ook een cirkelomtrek kan zijn.

Laat dan om de genoemde plaats te bepalen in de bijgevoegde figuur het punt A het onveranderlijke begin zijn van x en laat volgens onderstelling deze x zich onbeperkt uitstrekken langs de rechte AE vanaf A in de richting van E en laat de hoek die y en x insluiten gelijk zijn aan de hoek AGF.

Omdat $f^2 - x^2$ staat tot y^2 zoals l staat tot g, daarom is verder het volgende duidelijk: indien zowel AG als AC gelijk aan de bekende f genomen worden en men er voor zorgt dat CG staat tot GF zoals l staat tot g en dat met middelpunt A en transversale middellijn CG en met parameter GF [1] de ellips GDC beschreven wordt, dan zal deze kromme GDC de gezochte plaats zijn.

[1] gevolg 7 van prop. 13, Lib. I, blz.[213] en gevolg 1 van prop. 14, Lib. I, blz. [218] en op grond van datgene wat behandeld is tegen het einde van hoofdstuk 4 van Liber Primus.

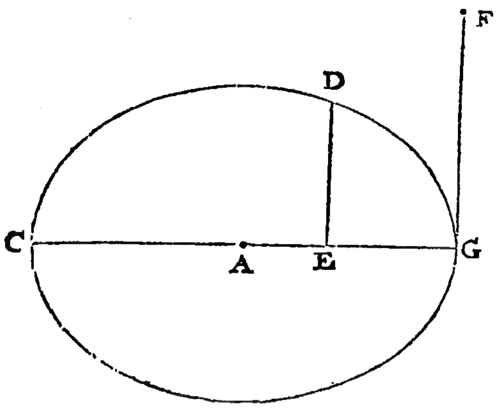
THEOREMA XIV.

Propositio 15.

Si æquatio ſit $\frac{lyy}{g} \propto ff - xx$, erit Locus quæſitus Ellipſis.

At verò cum Ellipſeos ſpecies, quæ latera rectum & tranſverſum æqualia habet, angulumque quem ordinatim applicatæ faciunt ad diametrum rectum, ſit Circuli circumſerentia: palam fit caſu propoſito Locum quæſitum etiam Circuli peripheriam eſſe poſſe.

Hinc ad prædicti Loci determinationem eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile A punctum, atque eadem x ſe per lineam A E ab A versùs E indeterminatè extendere intelliga-



tur, ſitque angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo A G F. Porrò cum ſit ut l ad g, ita $ff - xx$ ad yy: facilè apparet, ſi tam A G quàm A C ſumantur æquales f cognitæ; fiatque ut l ad g, ita C G ad G F, ac centro A, tranſverſâ diametro C G, & parametro G F [1] Ellipſis deſcribatur G D C eandem curvam G D C fore Locum quæſitum.

Sum-

[1] *per 7 Corol. 13 & 1 Cor. 14 primi hujus, ut & per ea quæ circa finem cap. 4 ejuſdem lib. tradita ſunt.*

[280] Wanneer men immers daarop willekeurig een punt aanneemt, zeg *D*, en *DE* evenwijdig aan *FG* trekt, dan zal[1] op grond van de aard van de ellips [3.5] het vierkant op *ED* staan tot de rechthoek *CEG* zoals *FG* staat tot *GC*. Dit betekent het volgende: indien *ED* y genoemd wordt, dan zal, omdat $CE = f + x$ en $EG = f - x$, y^2 staan tot $f^2 - x^2$ zoals g staat tot l en dus geldt $\frac{ly^2}{g} = f^2 - x^2$. Hetgeen te bewijzen was.

Overigens blijkt ook duidelijk dat, indien *CG* en *GF* gelijk zijn, d.w.z. indien $l = g$, ook de rechthoek *CEG* gelijk zal zijn aan het vierkant op *ED*. Daarom zal ook, indien de hoek *CGF* recht is, de kromme *GDC* een cirkelomtrek zijn.

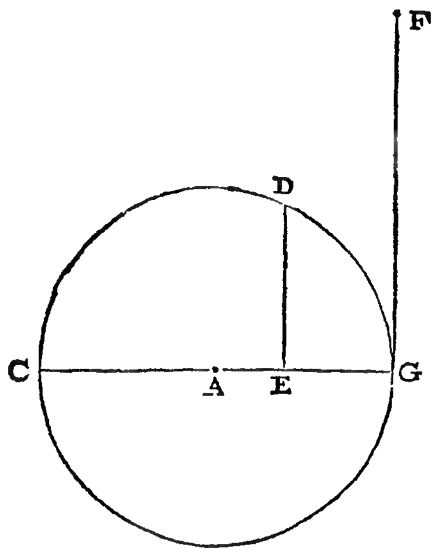
ALGEMENE REGEL EN EEN MANIER OM ALLE VERGELIJKINGEN DIE VOORTKOMEN UIT EEN DAARTOE LEIDENDE BEREKENING – IN HET GEVAL WAARIN DE PLAATS EEN HYPERBOOL OF EEN ELLIPS OF EEN CIRKELOMTREK IS – TE HERLEIDEN TOT EEN VAN DE VIER VOORAFGAANDE GEVALLEN, DIE REEDS MET – EVENEENS VIER – STELLINGEN ZIJN UITEENGEZET.

Het kan gebeuren dat de onbekenden niet slechts met elkaar vermenigvuldigd voorkomen of niet slechts een van beide, of beide, met zichzelf vermenigvuldigd, maar dat ook de ene of de andere, of beide, bovendien in de vergelijking voorkomen in de eerste macht in een product met een andere grootheid, bekend of onbekend

[1] prop. 13, Lib. I, blz. [205].

Sumpto namque in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi F G parallelâ, erit [1] ex natura Ellipseos ut F G ad G C, ita E D quadratum ad C E G rectangulum. Hoc est, si E D vocetur y, cum C E sit $\infty f + x$, & E G $\infty f - x$, erit ut g ad l, ita yy ad $ff - xx$, unde $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$. Quod erat propositum.

[1] per 13 primi hujus.



Cæterùm liquidò constat, si C G & G F æquales fuerint, hoc est, si $l \infty g$, quòd etiam C E G rectangulum quadrato E D æquale sit futurum. Ideoque si angulus C G F sit rectus, curvam G D C fore Circuli circumferentiam.

Regula universalis, modusque reducendi omnes æquationes, quæ ex convenienti operatione existunt, cùm Locus vel Hyperbola est, vel Ellipsis, vel Circuli circumferentia, ad aliquem quatuor casuum præcedentium, totidem Theorematibus jam explicatorum.

Si contingat, ut quantitatum incognitarum non modò una in alteram, aut non tantùm alterutra vel utraque in se ducta, sed & vel hæc, vel illa, vel utraque unius præterea dimensionis in æquatione reperiatur, constituens planum cum alia, sive cognitâ sive incognitâ,

[281] of zelfs deels met een bekende, deels met een onbekende grootheid.
In dit geval moet men in plaats van de onbekenden of in plaats van een van beide, andere onbekenden of één andere onbekende aannemen die groter of kleiner zijn dan deze (oorspronkelijke onbekenden, vert.).
Het verschil daarbij is de gehele grootheid die met de onbekende die niet vervangen wordt, in één product voorkomt. Dit is namelijk het geval indien geen van beide onbekenden, met zichzelf vermenigvuldigd, in de vergelijking voorkomt; in het andere geval is het verschil slechts de helft van die grootheid die een product vormt met de onbekende die vervangen wordt. In elk van beide gevallen voorziet men het verschil van verschillend voorteken + of – overeenkomstig het teken dat aan deze grootheden voorafgaat waarbij deze zo gerangschikt zijn dat zij met de betreffende onbekenden aan dezelfde kant van de vergelijking voorkomen [3.6].
Wanneer men hierna, zonodig na herhaling (van deze bewerking, vert.), niet uitkomt op de formules voor parabolen die in het tweede hoofdstuk uiteengezet zijn, dan zal de vergelijking zijn herleid tot één van de vier bovenstaande gevallen en dus zal het voor de lezer niet moeilijk zijn de bijbehorende plaats te bepalen en te beschrijven met behulp van datgene wat hierboven uiteengezet is.

Voorbeeld van herleiding van vergelijkingen tot de gedaante van Stelling XI

Indien de vergelijking luidt $yx - cx + hy = e^2$ dan zal, wanneer men stelt $z = y - c$ en $v = x + h$, gelden $z + c = y$ en $v - h = x$.
Indien volgens de Regel overal in de vergelijking in plaats van y wordt ingevuld $z + c$, dan zal gelden $zx + cx - cx + hz + hc = e^2$, oftewel $zx + hz + hc = e^2$ en indien weer in plaats van x wordt gesubstitueerd $v - h$, dan zal gelden
$zv - hz + hz + hc = e^2$, d.w.z. $zv = e^2 - hc$, of (indien in plaats van de term $e^2 - hc$, die geheel bekend is, geschreven wordt f^2) $zv = f^2$. Dan is het duidelijk dat de vergelijking herleid is tot de formule van Stelling XI en dat dus de gezochte plaats een hyperbool is [3.7].
Voor een gedetailleerde bepaling en beschrijving [3.8] daarvan nemen we aan dat in de bijgevoegde figuur (blz. [282], vert.) het punt A het onveranderlijke begin is van x en dat deze x zich volgens onderstelling langs de rechte AE onbeperkt uitstrekt en dat de hoek die y en x insluiten gelijk is aan de hoek EAK

tâ, ſive etiam cum partim cognita & partim incognita quantitate: oportet loco incognitarum, aut illarum alterutrius, aſſumere alias vel aliam, quæ ipſas excedunt, vel ab iis deficiunt; idque integrâ quantitate, quæ cum illa incognita, in cujus locum nova non eſt aſſumpta, planum conſtituere reperitur, ſi nempe incognitarum neutra in ſe ipſam in æquatione ducta ſit; ſin ſecus, dimidio tantùm ejus quantitatis, quæ planum conſtituit cum incognita, in cujus locum aſſumptio facta eſt, caſu utroque juxta differentem affectionem per ſigna + vel —, quæ præfiguntur iiſdem illis quantitatibus, ita ordinatis, ut cum incognitis ab eadem æquationis parte reperiantur. Quo facto, & reïterato, ubi opùs, ſi ad formulas Parabolarum, capite ſecundo expoſitas perventum non fuerit, ad aliquem quatuor ſuprapoſitorum caſuum reducta erit æquatio, ac proinde ipſi convenientem Locum determinare ac deſcribere, per ea quæ ſuperiùs explicata ſunt, haud difficile erit.

Exemplum reductionis æquationum ad formulam Theorematis XI.

Si æquatio fuerit $yx - cx + hy \infty ee$: aſſumpto $z \infty y - c$, & $v \infty x + h$, erit $z + c \infty y$, & $v - h \infty x$.

Vnde ſi ſecundùm Regulam ubique in æquatione loco y ſubſtituatur $z + c$, erit $zx + cx - cx + hz + hc \infty ee$, ſive $zx + hz + hc \infty ee$; ac rurſus ſi loco ipſius x ſubrogetur $v - h$, erit $zv - hz + hz + hc \infty ee$, id eſt, $zv \infty ee - hc$. aut, (ſi loco termini $ee - hc$, qui in totum cognitus eſt, ſcribatur ff) $zv \infty ff$. Et apparet æquationem reductam eſſe ad formulam Theorematis XI, ac proinde Locum quæſitum eſſe Hyperbolam.

Ad cujus ſpecificam determinationem ac deſcriptionem eſto in appoſita figura initium ipſius x immutabile punctum A, atque eadem x per rectam AE indefinitè ſe extendere intelligatur, ſitque angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAK

[282] of het supplement daarvan.

Omdat $z = y - c$, moet men vervolgens, indien we aannemen dat y boven de rechte *AE* uitsteekt, ook de rechte *KB* daarboven trekken, evenwijdig aan *AE*, zodanig dat het deel van de rechte *AK* en van alle daaraan evenwijdige lijnen, gelegen tussen *AE* en *KB*, zoals *AK*, gelijk zijn aan de bekende c.

Omdat v gelijk is aan $x + h$, moet men vervolgens *BK* verlengen via *K* tot aan *G*, zodanig dat *KG* gelijk is aan h.

Hierdoor zal *G* het middelpunt zijn van de kromme en *GB* één van de asymptoten [3.9] en de andere asymptoot, zeg *GH*, zal evenwijdig zijn aan *AK*.

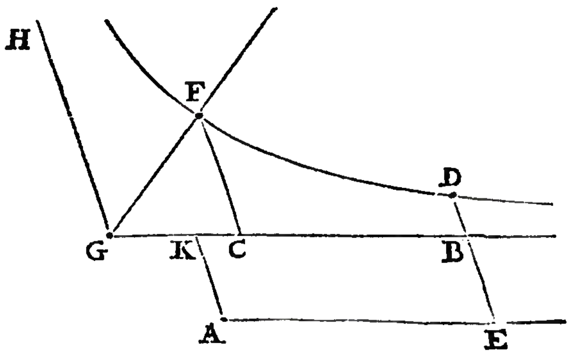
Op grond hiervan beweer ik het volgende: indien men volgens de Regel die vervat is in de eerder genoemde Stelling XI, op de rechte *GB* een stuk *GC* neemt, gelijk aan de bekende f en *CF* trekt gelijk aan deze *GC* en evenwijdig aan de rechte *AK* of *GH* en door het punt *F* een hyperbool *FD* beschrijft met *GB* en *GH* als asymptoten, of met *GB* als asymptoot en *GF* als as, dan zal de kromme *FD* de gezochte plaats zijn.

Wanneer men immers daarop willekeurig een punt aanneemt [3.10], zeg *D*, en *DE* evenwijdig aan *AK* trekt, die (*DE*, vert.) de rechte *KB* in *B* snijdt en deze *DE* y noemt, dan zal *DB* oftewel $DE - EB$ gelijk zijn aan $y - c$, dat is aan z.

Er geldt echter ook dat *GB*, oftewel $AE + GK$, gelijk is aan $x + h$, dat is aan v. Omdat op grond van de aard van een hyperbool de rechthoek *GBD* gelijk is aan het vierkant op *GC*, zal ook $zv = f^2$, zodat wanneer men weer ingevoerd heeft $y - c$ in plaats van z en $x + h$ in plaats van v en $e^2 - ch$ in plaats van f^2, dus zal gelden

$yx - cx + hy - ch = e^2 - ch$, oftewel $yx - cx + hy = e^2$. Hetgeen gesteld was.

aut ejusdem ad duos rectos supplemento. Deinde, quoniam z est $\infty\, y - c$, si y supra lineam A E exsurgere concipiatur, ducenda quoque est supra eandem recta K B ipsi A E parallela; ita ut pars rectæ A K, omniumque ipsi æquidistantium, inter A E & K B intercepta, veluti A K, æquetur c cognitæ. Porrò, quoniam v est $\infty\, x + b$, producenda est ipsa B K per K usque ad G, ita ut K G sit



$\infty\, b$. Quo facto, erit G centrum ipsius curvæ, & G B una Asymptotωn, eritque altera ipsi A K parallela, ut G H. Vnde si juxta Regulam prædicti Theorematis XI in recta G B sumatur G C æqualis f cognitæ, ducaturque C F eidem G C æqualis, ac parallela rectæ A K vel G H, atque per punctum F, Asymptotis G B & G H, sive Asymptoto G B atque ad axem G F, Hyperbola describatur F D: dico curvam F D fore Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi A K parallelâ, quæ secet rectam K B in B, si eadem D E vocetur y, erit D B sive D E — E B $\infty\, y - c$, id est, z. Est autem & G B sive A E + G K $\infty\, x + b$, hoc est, v. Quare cum ex natura Hyperboles rectangulum G B D æquetur G C quadrato, erit quoque $z\,v \infty ff$. aut restitutis $y - c$ loco ipsius z, & $x + b$ in locum ipsius v, atque $ee - cb$ loco ff, erit $yx - cx + by - cb \infty ee - cb$, hoc est, $yx - cx + by \infty ee$. Quod erat propositum.

Exem-

[283] Voorbeelden van herleiding van vergelijkingen tot de gedaante van Stelling XII en XIII

Indien de vergelijking luidt $y^2 + \frac{2bxy}{a} + 2cy = \frac{fx^2}{a} + ex + d^2$, dan zal, indien men stelt $z = y + \frac{bx}{a} + c$, gelden $y = z - \frac{bx}{a} - c$ en wanneer men dit ingevuld heeft in plaats van y en het kwadraat daarvan in plaats van y^2 [3.11] en de termen weggelaten heeft die tegen elkaar wegvallen, dan zal gelden

$$z^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{2bcx}{a} - c^2 = \frac{fx^2}{a} + ex + d^2$$

en, met passende omzetting,

$$z^2 = \frac{fx^2}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} + ex + \frac{2bcx}{a} + d^2 + c^2.$$

Dit betekent het volgende: indien men alle termen van de vergelijking met a^2 vermenigvuldigd heeft en het resultaat gedeeld heeft door $fa + b^2$, opdat de grootheid x^2 zonder breuk overblijft, dan krijgt men

$$\frac{a^2z^2}{fa+b^2} = x^2 + \frac{a^2ex+2abcx}{fa+b^2} + \frac{a^2d^2+a^2c^2}{fa+b^2}.$$

Wanneer men vervolgens stelt $v = x + \frac{a^2e+2abc}{2fa+2b^2}$ opdat ook de term in de vergelijking waarin x in de eerste macht voorkomt geheel en al verdwijnt, dan verkrijgt men $x = v + \frac{-a^2e-2abc}{2fa+2b^2}$. Wanneer men dit in plaats van x heeft ingevuld en het kwadraat ervan in plaats van x^2, en de termen weggelaten heeft die tegen elkaar wegvallen, dan zal de vergelijking zijn herleid tot de vereiste gedaante [3.12]. Om echter een langere berekening te vermijden schrijven we $2h$ in plaats van

$\frac{a^2e+2abc}{fa+b^2}$, zodat de vergelijking wordt

$$\frac{a^2z^2}{fa+b^2} = x^2 + 2hx + \frac{a^2d^2+a^2c^2}{fa+b^2}.$$

Wanneer we dan stellen $v = x + h$ oftewel $x = v - h$ en dit in de vergelijking invullen in plaats van x en het kwadraat daarvan in plaats van x^2, dan zal gelden

$$\frac{a^2z^2}{fa+b^2} = v^2 - h^2 + \frac{a^2d^2+a^2c^2}{fa+b^2}.$$

Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis XII & XIII.

Si æquatio sit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \infty \frac{fxx}{a} + ex + dd$, assumpto $z \infty y + \frac{bx}{a} + c$, erit $y \infty z - \frac{bx}{a} - c$, eoque substituto in locum ipsius y, atque ejusdem quadrato loco yy, sublatisque iis, quæ se invicem destruunt, erit $zz - \frac{bbxx}{aa} - \frac{2bcx}{a} - cc \infty \frac{fxx}{a} + ex + dd$. Et factâ congruâ transpositione, $zz \infty \frac{fxx}{a} + \frac{bbxx}{aa} + ex + \frac{2bcx}{a} + dd + cc$, hoc est, multiplicatis omnibus æquationis terminis per aa, productoque diviso per $fa + bb$; ut quantitas xx absque fractione remaneat, fiet $\frac{aazz}{fa+bb} \infty xx + \frac{aaex+2abcx}{fa+bb} + \frac{aadd+aacc}{fa+bb}$.

Deinde assumpto $v \infty x + \frac{aae+2abc}{2fa+2bb}$, ut terminus quoque æquationis, in quo x unius dimensionis reperitur, planè evanescat, habebitur $x \infty v \frac{-aae-2abc}{2fa+2bb}$. Quo substituto in locum ipsius x, atque ejusdem quadrato loco xx, ablatisque iis quæ se invicem tollunt, reducta erit æquatio ad formulam requisitam. At verò ut vitetur prolixior operatio loco $\frac{aae+2abc}{fa+bb}$ scribatur $2h$, ita ut fiat æquatio $\frac{aazz}{fa+bb} \infty xx + 2hx \frac{+aadd+aacc}{fa+bb}$. Tum assumpto $v \infty x + h$ seu $x \infty v - h$, eoque substituto loco x in æquatione, ac ejusdem quadrato loco xx: erit $\frac{aazz}{fa+bb} \infty vv - hh + \frac{aadd+aacc}{fa+bb}$. Vnde apparet, ante omnia hîc esse considerandum, utrum hh sit majus quàm $\frac{aadd+aacc}{fa+bb}$, an contra. si enim majus sit, erit casus Theorematis XII; sin contra, erit casus Theorematis XIII. Ponatur itaque primò majus, ac proinde æquatio formulæ Theorematis XII. Et constat exinde Locum quæsitum Hyperbolam esse.

Ad cujus peculiarem determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, eademque x in linea A E ab A versùs E indefinitè se extendere intelligatur; sitque angulus

 quem

[283, vervolg]
Daaruit blijkt dat hier vóór alles beschouwd moet worden of h^2 groter is dan $\frac{a^2d^2+a^2c^2}{fa+b^2}$ of dat het tegengestelde geldt [3.13]. Want indien h^2 groter is, dan zal het geval van Stelling XII zich voordoen; maar in het tegenovergestelde geval zal het geval van Stelling XIII optreden. Laat nu allereerst ondersteld worden dat h^2 groter is en dat dus de gedaante van Stelling XII geldt [3.14] . Het blijkt daaruit dat de gezochte plaats een hyperbool is. Om deze in detail te bepalen zij in bijgevoegde figuur het punt A het vaste begin van x die zich volgens veronderstelling onbeperkt uitstrekt langs de rechte AE vanaf A in de richting van E; laat ook de hoek die
[284] x en y insluiten gelijk zijn aan de hoek EAK of het supplement daarvan.

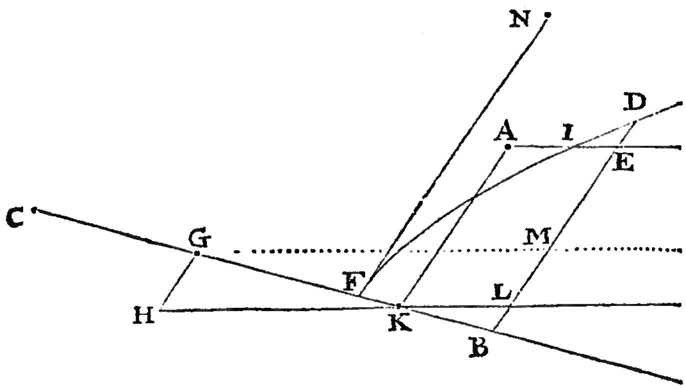
Omdat $z = y + c + \frac{bx}{a}$ moet men – indien men veronderstelt dat y boven de lijn AE uitsteekt, zeg als ED – eerst onder deze AE de rechte KL trekken, evenwijdig aan AE, zó dat het gedeelte van de rechte AK en van alle lijnstukken daaraan evenwijdig die bevat zijn tussen de genoemde AE en KL, zoals AK, EL, etc. gelijk zijn aan de bekende c.

Vervolgens moet men eerst LK verlengen tot H zodanig dat KH gelijk is aan h en dus HL, willekeurig opgevat, gelijk is aan $x + h$, d.w.z. gelijk aan v; daarna moet men door het punt H het lijnstuk HG trekken, evenwijdig aan AK zodanig dat KH staat tot HG zoals a staat tot b. Indien men daarna door de punten G en K de rechte GKB trekt, dan zullen van alle rechten die evenwijdig zijn aan AK de stukken die bevat zijn tussen KL en KB (zoals bijvoorbeeld LB) dezelfde verhouding hebben tot de stukken van KL die bevat zijn tussen deze evenwijdige lijnen en K (zoals bijvoorbeeld LK), als de verhouding die er bestaat tussen b en a, d.w.z. KL staat tot LB zoals a staat tot b, daar elk van beide verhoudingen gelijk is aan die van KH tot HG.

Aangezien KL of AE, willekeurig opgevat, gelijk is aan x, zal dus LB, evenals ook een willekeurig daaraan evenwijdig lijnstuk, bevat tussen KL en KB, gelijk zijn aan $\frac{bx}{a}$ en dus is ieder lijnstuk dat boven de rechte AE uitsteekt en dat als de onbekende y kan optreden, na verlenging tot KB, zoals DB oftewel $DE + EL + LB$, gelijk aan $y+c+\frac{bx}{a}$, d.w.z. gelijk aan z.

Op grond daarvan blijkt dat volgens de Regel de lijn GB genomen moet worden als (de drager van een, vert.) middellijn van de hyperbool, waarbij de daarop geordend aangebrachte rechten evenwijdig zijn aan AK of DB;

quem x & y comprehendunt æqualis angulo E A K aut ipſius ad duos rectos ſupplemento. Porrò quoniam $z \infty y + c + \frac{bx}{a}$, ſi y ſupra lineam A E exſurgere intelligatur, ut E D, ducenda primùm eſt infra eandem A E recta K L ipſi A E parallela; ita ut pars rectæ A K omniumque ipſi æquidiſtantium inter prædictas A E & K L intercepta, veluti A K, E L, &c. æquetur c cognitæ. Deinde productâ L K uſque ad H, ita ut K H ſit ∞ b, ideoque H L indefinitè ſumpta ∞ $x + b$, hoc eſt, v, ducatur per H punctum recta H G ipſi A K parallela, ita ut K H ad H G ſit, ut a ad b. Quo facto, ſi per puncta G & K recta agatur linea G K B, habebunt omnium ipſi A K parallelarum partes, quæ inter K L & K B in-



tercipiuntur (ut, exempli gratiâ, L B), ad partes ipſius K L, inter eaſdem parallelas & punctum K interceptas (ut, verbi gratiâ, L K) eandem rationem, quæ eſt inter b & a: hoc eſt, erit ut a ad b, ita K L ad L B, cum utraque ſit ut K H ad H G. Ideoque cum K L ſive A E indefinitè ſumpta ſit ∞ x, erit L B, ut & quælibet ipſi parallela, inter K L & K B intercepta, ∞ $\frac{bx}{a}$: ac proinde omnis linea ſupra A E rectam exſurgens, quæ poſſit eſſe y incognita, ad rectam K B producta, veluti D B ſive D E + E L + L B erit ∞ $y + c + \frac{bx}{a}$, hoc eſt, z. Vnde apparet, juxta Regulam lineam G B ſumendam eſſe pro Hyperbolæ diametro, ad quam ordinatim applicatæ ſint ipſi A K ſeu D B parallelæ: eritque ejuſdem

[285] van deze hyperbool zal ook het punt G het middelpunt zijn.
Op grond van het voorgaande is de driehoek KHG volledig bekend, daar immers de zijden KH en HG en de hoek bij H, die door deze wordt ingesloten, bekend zijn; daarom zal ook de verhouding van de zijde KH tot KG bekend zijn, d.w.z. de verhouding van GM (die volgens onderstelling door G evenwijdig aan KL loopt) tot GB, welke verhouding we stellen als a tot i.
Nu is GM of HL, willekeurig opgevat, gelijk aan v en dus zal GB, eveneens willekeurig verondersteld, d.w.z. elk willekeurig deel van de middellijn dat bevat is tussen het middelpunt en de geordend aangebrachte rechten, gelijk zijn aan $\frac{iv}{a}$.
Het kwadraat van dit tussenstuk vormt volgens de Regel één term van de vergelijking; daarom moet de vergelijking door vermenigvuldiging of deling – of door beide – zó herleid worden dat daarin ook ditzelfde kwadraat, namelijk $\frac{i^2v^2}{a^2}$ voorkomt [3.15].
Om deze herleiding op een vaste manier te laten plaats hebben, moet het genoemde kwadraat van het lijnstuk GB, onbepaald opgevat, d.w.z. $\frac{i^2v^2}{a^2}$ gedeeld worden door de term in de vergelijking waarin v^2 ofwel alleen voorkomt ofwel voorzien van een andere breuk als coëfficiënt en de gehele vergelijking moet vermenigvuldigd worden met het gevonden quotiënt.
Zo wordt in het bovenstaande voorbeeld (blz.[283], regel 10 v.o., vert.), indien $\frac{i^2v^2}{a^2}$ gedeeld wordt door v^2, het quotiënt $\frac{i^2}{a^2}$. Daarom moet de gehele vergelijking vermenigvuldigd worden met i^2 en het resultaat gedeeld worden door a^2, zodat er ontstaat

$$\frac{i^2z^2}{fa+b^2} = \frac{i^2v^2}{a^2} - \frac{i^2h^2}{a^2} + \frac{i^2d^2+i^2c^2}{fa+b^2}.$$

Indien volgens de Regel de halve transversale zijde GF of GC gesteld wordt op

$$\sqrt{\frac{i^2h^2}{a^2} - \frac{i^2d^2+i^2c^2}{fa+b^2}}$$

en de verhouding van de transversale zijde CF tot de rechte zijde FN op die van i^2 tot $fa + b^2$ en met deze zijden en met de reeds gevonden middellijn en het reeds gevonden middelpunt de hyperbool FD beschreven wordt die de rechte AE of KA, na verlenging, in I snijdt, dan beweer ik dat de kromme ID de gezochte plaats is.
Wanneer men immers op deze kromme willekeurig een punt aanneemt, zeg D, en DE evenwijdig aan AK trekt en deze verlengt zodat deze de rechte KL in L snijdt en de middellijn GB ontmoet in B en indien men deze DE y noemt, dan zal op grond van het voorafgaande DB gelijk zijn aan z.

dem Hyperbolæ centrum G punctum. At verò cum ex ante dictis triangulum KHG omnino sit cognitum, utpote lateribus KH & HG anguloque ad H sub iisdem comprehenso notis, erit quoque cognita ratio lateris KH ad KG, hoc est, ipsius GM (quæ per G ipsi KL æquidistans intelligitur) ad GB, quæ sit ut a ad i. Quare cum GM seu HL indefinitè sit v, GB quoque indefinitè concepta, hoc est, quælibet diametri portio, inter centrum & ordinatim applicatas intercepta, erit $\frac{iv}{a}$. Cujus quidem interceptæ quadratum cum juxta formulam Regulæ unum æquationis terminum constituat, per multiplicationem aut divisionem, vel per utramque ita reducatur æquatio, ut in eadem quoque idem quadratum, nimirum $\frac{iivv}{aa}$ inveniatur. Quod quidem ut certâ methodo fiat, prædictum quadratum rectæ GB indefinitè conceptæ, hoc est, $\frac{iivv}{aa}$, dividatur per æquationis terminum, in quo vv sive simpliciter, sive aliâ fractione affectum invenitur, ac per inventum quotientem tota æquatio multiplicetur. ut in supra posito exemplo, si $\frac{iivv}{aa}$ dividatur per vv, fiet quotiens $\frac{ii}{aa}$. quare tota æquatio multiplicanda est per ii, productumque dividendum per aa, ita ut fiat $\frac{iizz}{fa+bb} \propto \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{iidd+iicc}{fa+bb}$. Vnde si juxta Regulam semi-latus transversum fiat GF vel GC $\propto$ $\sqrt{\frac{iibb}{aa} - \frac{iidd-iicc}{fa+bb}}$, atque ratio transversi lateris CF ad rectum FN, ut ii ad $fa+bb$, & iisdem lateribus, diametroque ac centro jam inventis Hyperbole describatur FD, secans rectam AE vel KA productam in I: dico curvam ID esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi AK parallelâ, eâque productâ ut secet rectam KL in L, & diametro GB occurrat in B, si eadem DE vocetur y, erit ex ante dictis DB $\propto$ z. Est autem, ut jam annotatum, GB $\propto$ $\frac{iv}{a}$, atque ex hypothesi GF seu GC $\propto \sqrt{\frac{iibb}{aa} - \frac{iidd-iicc}{fa+bb}}$, ideoque BC $\propto \frac{iv}{a} + \sqrt{\frac{iibb}{aa} - \frac{iidd-iicc}{fa+bb}}$, ac BF $\propto \frac{iv}{a} -$

 $\sqrt{\frac{iibb}{aa}}$

[285, vervolg]

Zoals reeds opgemerkt, geldt $GB = \frac{iv}{a}$ en volgens onderstelling geldt

$$GF \text{ of } GC = \sqrt{\frac{i^2h^2}{a^2} - \frac{i^2d^2 + i^2c^2}{fa + b^2}} \quad \text{en dus}$$

$$BC = \frac{iv}{a} + \sqrt{\frac{i^2h^2}{a^2} - \frac{i^2d^2 + i^2c^2}{fa + b^2}}$$

[286] en $$BF = \frac{iv}{a} - \sqrt{\frac{i^2h^2}{a^2} - \frac{i^2d^2 + i^2c^2}{fa + b^2}}$$, terwijl voor de rechterhoek *CBF* geldt

$$CBF = \frac{i^2v^2}{a^2} - \frac{i^2h^2}{a^2} + \frac{i^2d^2 + i^2c^2}{fa + b^2}.$$ Omdat op grond van de aard van een hyperbool *NF* staat tot *FC* oftewel $fa + b^2$ tot i^2, zoals het kwadraat op *DB*, dat is z^2, tot de genoemde rechthoek *CBF* [3.16], daarom zal gelden:

$$\frac{i^2z^2}{fa + b^2} = \frac{i^2v^2}{a^2} - \frac{i^2h^2}{a^2} + \frac{i^2d^2 + i^2c^2}{fa + b^2}.$$

Wanneer we dan nog aan beide zijden vermenigvuldigen met a^2en delen door i^2, dan ontstaat:

$$\frac{a^2z^2}{fa + b^2} = v^2 - h^2 + \frac{a^2d^2 + a^2c^2}{fa + b^2},$$

Wanneer we vervolgens weer $x + h$ invullen in plaats van v, dan ontstaat

$$\frac{a^2z^2}{fa + b^2} = x^2 + 2hx + \frac{a^2d^2 + a^2c^2}{fa + b^2},$$

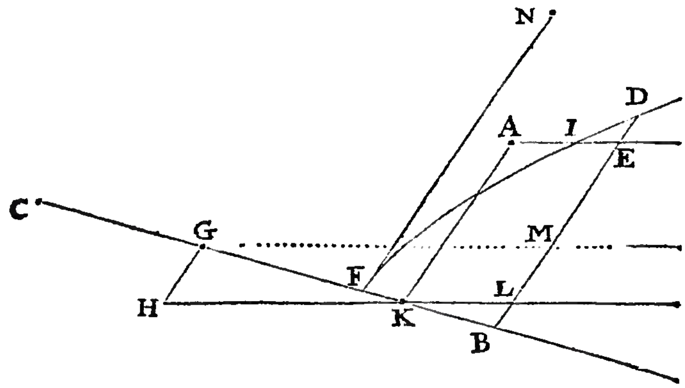
en als we evenzo $\frac{ea^2 + 2bca}{fa + b^2}$ invullen in plaats van $2h$, dan ontstaat

$$\frac{a^2z^2}{fa + b^2} = x^2 + \frac{ea^2x + 2bcax}{fa + b^2} + \frac{a^2d^2 + a^2c^2}{fa + b^2}.$$

Verder krijgen we, wanneer we alle termen hebben vermenigvuldigd met $fa + b^2$ en gedeeld door a^2,

286 ELEM. CVRVARVM

$\sqrt{\frac{iibb}{aa} - \frac{iidd - iicc}{fa+bb}}$, & rectangulum CBF $\infty \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{iidd+iicc}{fa+bb}$. Hinc cum ex natura Hyperboles NF ad FC, seu $fa+bb$ ad ii sit, ut DB quadratum, hoc est, zz, ad prædictum rectangulum CBF: erit $\frac{iizz}{fa+bb} \infty \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{iidd+iicc}{fa+bb}$,



Multiplicetur jam utrinque per aa, & dividatur per ii, eritque $\frac{aazz}{fa+bb} \infty vv - bb + \frac{aadd+aacc}{fa+bb}$. Dein restituto $x+b$ loco v, exurget $\frac{aazz}{fa+bb} \infty xx + 2bx + \frac{aadd+aacc}{fa+bb}$; itemque $\frac{eaa+2bca}{fa+bb}$ loco $2b$, exurget $\frac{aazz}{fa+bb} \infty xx + \frac{eaax+2bcax}{fa+bb} + \frac{aadd+aacc}{fa+bb}$. Porrò multiplicatis omnibus per $fa+bb$ iisque divisis per aa, habebitur $zz \infty \frac{fxx}{a} + \frac{bbxx}{aa} + ex + \frac{2bcx}{a} + dd + cc$. Ac denique restituto $y + \frac{bx}{a} + c$ loco ipsius z, expunctisque quæ se invicem destruunt ac omnibus ritè ordinatis, fiet $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy$ $\infty \frac{fxx}{a} + ex + dd$. Quod erat propositum.

At verò ponatur secundò bb minus quàm $\frac{ddaa+ccaa}{fa+bb}$, & supra posita æquatio $\frac{iizz}{fa+bb} \infty \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{ddii+ccii}{fa+bb}$, quæ, multiplicatis omnibus ejusdem terminis per $fa+bb$, ac producto diviso

[286, vervolg]

$$z^2 = \frac{fx^2}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} + ex + \frac{2bcx}{a} + d^2 + c^2.$$

Wanneer we tenslotte weer ingevoerd hebben $y + \frac{bx}{a} + c$ in plaats van z en de termen geschrapt hebben die elkaar opheffen en alle termen naar behoren gerangschikt hebben, dan krijgen we

$$y^2 + \frac{2bxy}{a} + 2cy = \frac{fx^2}{a} + ex + d^2.$$

Hetgeen gesteld was.

Laat verder als tweede geval [3.17] ondersteld worden dat h^2 kleiner is dan $\frac{d^2a^2 + c^2a^2}{fa + b^2}$ en dat de hierboven genoemde vergelijking luidt:

$$\frac{i^2z^2}{fa + b^2} = \frac{i^2v^2}{a^2} - \frac{i^2h^2}{a^2} + \frac{i^2d^2 + i^2c^2}{fa + b^2}.$$

Deze zal, na vermenigvuldiging van alle termen daarvan met $fa + b^2$,

[287] na deling van dit resultaat door i^2 en na een geschikte omzetting, dezelfde zijn als

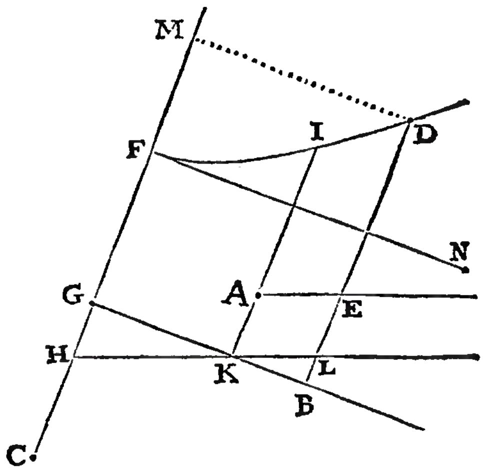
$$z^2 - d^2 - c^2 + \frac{fah^2 + b^2h^2}{a^2} = \frac{i^2v^2}{a^2} \cdot \frac{fa + b^2}{i^2}$$

zodat het rechterlid gelijk is aan $\frac{fav^2 + b^2v^2}{a^2}$.

Dit is de gedaante van Stelling XIII; de gezochte plaats zal dus weer een hyperbool zijn [3.18].

Om deze gedetailleerd te bepalen en te beschrijven, trekken we eerst, evenals in de voorgaande figuur, de lijnen *AE*, *AK*, *KL*, *KH*, *HG* en *GKB*. Dan zal weliswaar, zoals hierboven, *G* het middelpunt zijn, maar de middellijn zal niet liggen op de lijn *GK*, maar volgens de Regel [3.19], op de lijn *HG* na verlenging vanaf de kant van *G*. De lijnen die hierop geordend zijn aangebracht, zijn evenwijdig aan *GKB* en dan zal volgens dezelfde Regel de halve transversale middellijn, namelijk *GF* of *GC*, gelijk zijn aan $\sqrt{d^2 + c^2 - \frac{fah^2 + b^2h^2}{a^2}}$ en de verhouding van de middellijn tot de parameter zal zijn als $fa + b^2$ tot i^2.

Indien men er dan voor zorgt dat *CF* staat tot *FN* zoals $fa + b^2$ staat tot i^2 (waarbij *FN* evenwijdig getrokken moet worden aan *GKB*) dan zal *FN* de parameter zijn en diviso per ii, factâque decenti transpositione, eadem cum sequenti $zz - dd - cc + \frac{fabb + bbbb}{aa} \infty \frac{iivv}{aa}$ multip. per $fa + bb$ ac divis. per ii, id est, $\infty \frac{favv + bbvv}{aa}$. erit formulæ Theorematis XIII, unde Locus quæsitus iterum erit Hyperbola. Ad cujus specificam determinationem & descriptionem, postquam ut in præcedenti figura ductæ sunt lineæ AE, AK, KL, KH, HG, & GKB: erit quidem, ut supra, G centrum, at verò non erit diameter in linea GK, sed, juxta Regulam, in linea HG producta



ad partes G, ad quam ordinatim applicatæ sint ipsi GKB parallelæ, eritque juxta eandem Regulam dimidium transversæ diametri, nempe GF vel GC, æquale $\sqrt{dd + cc \frac{-fabb - bbbb}{aa}}$, ac ratio diametri ad parametrum ut $fa + bb$ ad ii. Quare si fiat, ut $fa + bb$ ad ii, ita CF ad FN, quæ quidem FN ipsi GKB æquidistans sit, erit FN parameter: ac proinde si centro G transversâ diametro CF & parametro FN Hyperbola describatur FD, secans ipsam AE vel KA productam in I, erit ID curva Locus quæsitus.

Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque DB ipsi AK (sive GF), & DM ipsi GB parallelâ, si

ED

[287, vervolg]
dus zal – indien men met middelpunt G, met transversale middellijn CF en parameter FN de hyperbool FD beschrijft die AE of het verlengde van KA in I snijdt – de kromme ID de gezochte plaats zijn.
Wanneer men immers op deze kromme willekeurig een punt aanneemt, zeg D, en DB evenwijdig trekt aan AK (of GF) en DM evenwijdig aan GB en
[288] ED y genoemd wordt, dan zal, zoals hierboven, DB of MG gelijk zijn aan z en BG of DM gelijk aan $\frac{iv}{a}$.

Aangezien GF of GC gelijk is aan $\sqrt{d^2+c^2-\frac{fah^2+b^2h^2}{a^2}}$, zal gelden

$$CM = z+\sqrt{d^2+c^2-\frac{fah^2+b^2h^2}{a^2}} \text{ en } MF = z-\sqrt{d^2+c^2-\frac{fah^2+b^2h^2}{a^2}}$$

en dus zal voor de rechthoek CMF gelden

$$CMF = z^2 - d^2 - c^2 + \frac{fah^2+b^2h^2}{a^2} .$$

Het vierkant op DM is echter gelijk aan $\frac{i^2v^2}{a^2}$.

Op grond van de aard van een hyperbool staat het vierkant op DM tot de rechthoek CMF zoals FN staat tot FC [3.20], oftewel

$$\frac{i^2v^2}{a^2} \text{ staat tot } z^2 - d^2 - c^2 + \frac{fah^2+b^2h^2}{a^2} \text{ zoals } i^2 \text{ staat tot } fa + b^2.$$

Daarom geldt ook

$$z^2 - d^2 - c^2 + \frac{fah^2+b^2h^2}{a^2} = \frac{fav^2+b^2v^2}{a^2}.$$

Wanneer men alle termen met a^2 vermenigvuldigd heeft en door $fa + b^2$ gedeeld heeft en de bekende term heeft overgebracht, zal gelden

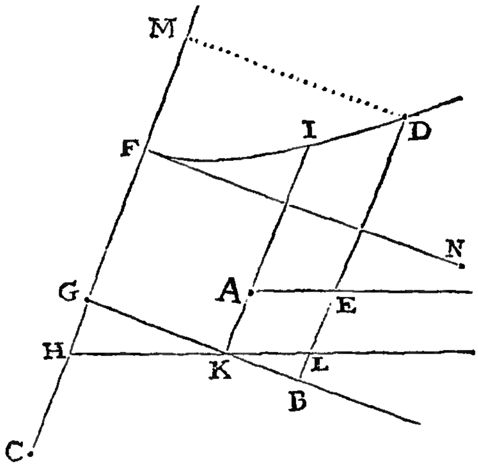
$$\frac{a^2z^2}{fa+b^2} = v^2 - h^2 + \frac{d^2a^2+c^2a^2}{fa+b^2} .$$

Stelt men dan weer $x + h$ in plaats van v, $\frac{ea^2+2bca}{fa+b^2}$ in plaats van $2h$, en $y+\frac{bx}{a}+c$ in plaats van z, en schrapt men de termen die tegen elkaar wegvallen en rangschikt men alle termen naar behoren, dan ontstaat

$$y^2+\frac{2bxy}{a}+2cy = fx^2 + ex + d^2.$$

Hetgeen te bepalen en te bewijzen was.

ED vocetur y, erit, ut supra, DB sive MG $\infty\, z$, & BG sive DM $\infty\, \frac{iv}{a}$. Cumque sit GF vel GC $\infty\, \sqrt{dd+cc\frac{-fabb-bbbb}{aa}}$, erit CM $\infty\, z+\sqrt{dd+cc\frac{-fabb-bbbb}{aa}}$, & MF $\infty\, z-\sqrt{dd+cc\frac{-fabb-bbbb}{aa}}$, ac propterea rectangulum CMF $\infty\, zz-dd-cc\frac{+fabb+bbbb}{aa}$. Est autem DM quadratum $\infty\, \frac{iivv}{aa}$.



Quare cum ex natura Hyperboles sit ut FN ad FC, ita DM quadratum ad CMF rectangulum, hoc est, ut ii ad $fa+bb$, ita $\frac{iivv}{aa}$ ad $zz-dd-cc\frac{+fabb+bbbb}{aa}$: erit quoque $zz-dd-cc\frac{+fabb+bbbb}{aa}\,\infty\,\frac{favv+bbvv}{aa}$. Et multiplicatis omnibus per aa, ac divisis per $fa+bb$, factâque transpositione cogniti termini, erit $\frac{aazz}{fa+bb}\,\infty\, vv-hh\frac{+ddaa+ccaa}{fa+bb}$. Dein restitutis $x+h$ loco v, $\frac{eaa+2bca}{fa+bb}$ loco $2h$, atque $y+\frac{bx}{a}+c$ loco ipsius z, expunctisque quæ se invicem destruunt ac omnibus ritè ordinatis, fiet $yy+\frac{2bxy}{a}+2cy\,\infty\,\frac{fxx}{a}+ex+dd$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

Si

[289] Stel nu dat de vergelijking luidt

$$x^2 + 2ay = \frac{2byx}{a}, \text{ oftewel } x^2 - \frac{2byx}{a} + 2ay = 0.$$

Wanneer men volgens de Regel stelt $v = x - \frac{by}{a}$, dan geldt $x = v + \frac{by}{a}$; indien men dit invult in plaats van x en het kwadraat daarvan in plaats van x^2 dan zal, na schrappen van de termen die elkaar opheffen, gelden

$$v^2 - \frac{b^2y^2}{a^2} + 2ay = 0 \text{ en, na passende omzetting, } v^2 = \frac{b^2y^2}{a^2} - 2ay.$$

Na vermenigvuldiging van alle termen van de vergelijking met a^2 en na deling van het product door b^2, geeft dit

$$\frac{a^2v^2}{b^2} = y^2 - \frac{2a^3y}{b^2}.$$

Wanneer men stelt $z = y - \frac{a^3}{b^2}$, dan krijgt men vervolgens $y = z + \frac{a^3}{b^2}$, en substitutie hiervan in de vergelijking in plaats van y en van het kwadraat ervan in plaats van y^2 geeft $\quad \frac{a^2v^2}{b^2} = z^2 - \frac{a^6}{b^4}$,

oftewel $\quad z^2 - \frac{a^6}{b^4} = \frac{a^2v^2}{b^2}$.

Dit is echter het geval van Stelling XIII en dus zal de gezochte plaats een hyperbool zijn.

Om deze nu in detail te bepalen zij in de bijgevoegde figuur (blz. [290], vert.) het punt A het vaste begin van x en wordt verondersteld dat deze x zich langs de lijn AB vanaf A onbeperkt uitstrekt in de richting van B, en de hoek die x en y insluiten is volgens aanname gelijk aan de hoek ABE.

Uit het voorafgaande is gemakkelijk te begrijpen dat in dit geval en in soortgelijke, de hyperbool zodanig beschreven moet worden dat de rechten die geordend op de middellijn zijn aangebracht, evenwijdig zijn aan AB. Daarom moet men eerst de rechte AC evenwijdig aan BE trekken. Omdat $v = x - \frac{by}{a}$, moet men verder de rechte AM trekken, zodanig dat van alle lijnen evenwijdig aan AB, de stukken die bevat zijn tussen AC en AM, zoals CM, tot de stukken van AC tussen A en de genoemde evenwijdige lijnen, zoals AC, de verhouding van b tot a hebben; dit betekent dat AC staat tot CM zoals a staat tot b.

Indien AC of BE, willekeurig verondersteld, y genoemd wordt, dan zullen dus CM en de overeenkomstige lijnstukken gelijk zijn aan $\frac{by}{a}$, en van de te beschrijven hyperbool zal de middellijn liggen op de genoemde AM.

Si æquatio sit $xx + 2ay \propto \frac{2bxy}{a}$, aut $xx - \frac{2byx}{a} + 2ay \propto 0$. Assumpto juxta Regulam $v \propto x - \frac{by}{a}$, erit $x \propto v + \frac{by}{a}$, eoque substituto in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, sublatisque iis quæ se invicem destruunt, erit $vv - \frac{bbyy}{aa} + 2ay \propto 0$. &, factâ congruâ transpositione, $vv \propto \frac{bbyy}{aa} - 2ay$; hoc est, multiplicatis omnibus æquationis terminis per aa, productoque diviso per bb, $\frac{aavv}{bb} \propto yy - \frac{2a^3y}{bb}$. Dein, assumpto $z \propto y - \frac{a^3}{bb}$, habebitur $y \propto z + \frac{a^3}{bb}$, eoque substituto in æquatione loco ipsius y, atque ipsius quadrato loco yy, erit $\frac{aavv}{bb} \propto zz - \frac{a^6}{b^4}$, sive $zz - \frac{a^6}{b^4} \propto \frac{aavv}{bb}$. Qui quidem casus est Theorematis 13^{tii}, ac proinde Locus quæsitus erit Hyperbola.

Ad cujus itaque peculiarem determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, eademque x in linea A B ab A versùs B indefinitè sese extendere intelligatur, sitque angulus, quem x & y comprehendunt, æqualis angulo A B E. Deinde, quoniam ex antedictis facilè colligitur Hyperbolam hoc casu & similibus ita esse describendam, ut ordinatim ad ejus diametrum applicatæ sint ipsi A B æquidistantes, ductâ rectâ A C ipsi B E parallelâ, quoniam $v \propto x - \frac{by}{a}$, ducenda porrò est recta A M; ita ut omnium ipsi A B parallelarum partes, inter A C & A M interceptæ, veluti C M, ad partes ipsius A C inter A & dictas parallelas interceptas, veluti A C, eandem rationem habeant, quæ est inter b & a; hoc est, ut sit quemadmodum a ad b, ita A C ad C M. Vnde si A C seu B E indefinitè sumpta vocetur y, erit C M & similes $\propto \frac{by}{a}$, ac describendæ Hyperboles diameter in dicta A M. Porrò, quoniam $z \propto y - \frac{a^3}{bb}$, si ab A C auferatur A F $\propto \frac{a^3}{bb}$: erit F C indefinitè sumpta $\propto z$, &, ductâ F N ipsi A B parallelâ, N centrum. Ac proinde, cum ratio ductæ N D ipsi F C æquidistantis & æqualis ad rectam D M aliarumque similium sit cognita, nempe ut a ad b, sitque itidem notus angulus

[289, vervolg]

Omdat $z = y - \frac{a^3}{b^2}$, zal, indien men *AF* (= $\frac{a^3}{b^2}$) aftrekt van *AC*, verder gelden dat *FC*, willekeurig opgevat, gelijk is aan z en indien men *FN* evenwijdig aan *AB* trekt, dan zal *N* het middelpunt zijn.
Aangezien de verhouding van *ND* (evenwijdig en gelijk aan *FC*) tot het lijnstuk *DM* – en van andere soortgelijke lijnstukken – bekend is, namelijk als a staat tot b

[290] en omdat de hoek *NDM* die door deze wordt ingesloten eveneens bekend is (deze is namelijk gelijk aan de gegeven of aangenomen hoek *ABE*), daarom zal ook de verhouding van *ND* tot *NM* en van andere soortgelijke lijnstukken bekend zijn; laat deze zijn als die van de bekende a tot een eveneens bekende e.
Omdat *ND* of *FC*, willekeurig genomen, door z wordt uitgedrukt, zal *NM*, eveneens willekeurig genomen, dus gelijk zijn aan $\frac{ez}{a}$. Het kwadraat hiervan moet echter volgens de formule van de Regel één term van de vergelijking uitmaken en daarom moet de bovenstaande vergelijking (blz. [289] r. 9 en 10 v.b., vert.) vermenigvuldigd worden met e^2 en het resultaat gedeeld worden door a^2, zodat er ontstaat

$$\frac{e^2z^2}{a^2} - \frac{e^2a^4}{b^4} = \frac{e^2v^2}{b^2}.$$

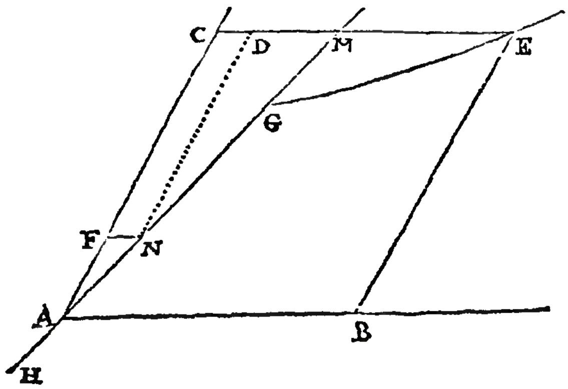
Tot slot dit: indien volgens de Regel als halve dwarse zijde *NG* of *NH* genomen wordt, gelijk aan $\frac{ea^2}{b^2}$, en de verhouding van de dwarse zijde tot de rechte zijde als e^2 tot b^2 en met deze zijden en met de reeds gevonden middellijn en het reeds gevonden middelpunt de hyperbool *GE* beschreven wordt, dan beweer ik dat de kromme *GE* de gezochte plaats is.

Wanneer men immers daarop willekeurig een punt neemt, zeg *E*, en *EB* trekt onder de hoek *ABE*, gelijk aan de gegeven of aangenomen hoek en ook *EC* evenwijdig trekt aan *AB*, die (d.w.z. *EC*, vert.) de middellijn *AM* snijdt in *M*, dan geldt het volgende: indien deze *EB*, d.w.z. *AC*, y genoemd wordt, dan zal, evenals hierboven, *CM* gelijk zijn aan $\frac{by}{a}$ en dus *ME*, oftewel *AB* – *CM*, gelijk zijn aan $x - \frac{by}{a}$, dus gelijk aan v. Zoals eerder werd opgemerkt, geldt echter $NM = \frac{ez}{a}$ en op grond van de veronderstelling is *NG* of *NH* gelijk aan $\frac{ea^2}{b^2}$ en dus

$$HM = \frac{ez}{a} + \frac{ea^2}{b^2} \text{ en } MG = \frac{ez}{a} - \frac{ea^2}{b^2}$$

en dus geldt voor de rechthoek *HMG*

NDM, sub iisdem comprehensus, utpote æqualis dato vel assumpto angulo ABE, erit quoque ratio ND ad NM aliarumque similium nota, quæ sit ut a cognitæ ad e itidem cognitam.



Hinc cum ND seu FC indefinitè sumpta exprimatur per z, erit NM itidem indefinitè sumpta $\infty \frac{ez}{a}$, cujus quidem quadratum cum juxta formulam Regulæ unum æquationis terminum constituere debeat, multiplicanda est suprascripta æquatio per ee, productumque dividendum per aa, ita ut fiat $\frac{eezz}{aa} - \frac{eea^4}{b^4} \infty \frac{eevv}{bb}$. Quo peracto, si juxta Regulam semi-latus transversum fiat NG vel NH $\infty \frac{eaa}{bb}$, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut ee ad bb; iisdemque lateribus ac diametro & centro jam inventis Hyperbole describatur GE: dico curvam GE esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti E, ductâque EB in angulo ABE, dato vel assumpto æquali, nec non EC ipsi AB parallelâ, secante diametrum AM in M; si eadem EB, hoc est, AC, vocetur y, erit, ut supra, CM $\infty \frac{by}{a}$, ac proinde ME, sive AB—CM, $\infty x - \frac{by}{a}$, hoc est, v. Est autem, ut superiùs annotatum, NM $\infty \frac{ex}{a}$, atque ex hypothesi NG seu NH $\infty \frac{eaa}{bb}$, ideoque HM $\infty \frac{ex}{a} + \frac{eaa}{bb}$, & MG $\infty \frac{ex}{a} - \frac{eaa}{bb}$, ac proinde rectangulum

[291] $$HMG = \frac{e^2z^2}{a^2} - \frac{e^2a^4}{b^4}.$$

Op grond van de aard van een hyperbool staat het vierkant op *ME*, dat wil zeggen v^2, tot de genoemde rechthoek *HMG* zoals de rechte zijde staat tot de dwarse zijde ofwel zoals b^2 staat tot e^2 [3.3]. Daarom zal gelden

$$\frac{e^2v^2}{b^2} = \frac{e^2z^2}{a^2} - \frac{e^2a^4}{b^4}$$

en, na vermenigvuldiging van alle termen met a^2 en na deling door e^2,

$$\frac{a^2v^2}{b^2} = z^2 - \frac{a^6}{b^4}.$$

Vervolgens ontstaat, na weer invoering van $y - \frac{a^3}{b^2}$ in plaats van z,

$$\frac{a^2v^2}{b^2} = y^2 - \frac{2a^3}{b^2}y,$$

zodat men, na vermenigvuldiging van alle termen met b^2 en na deling door a^2, verkrijgt

$$v^2 = \frac{b^2y^2}{a^2} - 2ay.$$

Tenslotte ontstaat, nadat men weer ingevoerd heeft $x - \frac{by}{a}$ in plaats van v en nadat men alle termen geschrapt heeft die tegen elkaar wegvallen en alles naar behoren heeft gerangschikt,

$$x^2 + 2ay = \frac{2byx}{a}.$$

Hetgeen gesteld was.

Vraagstuk II

Propositie 16

Bij twee gegeven punten een derde punt te vinden met de eigenschap dat de lijnstukken die van daaruit getrokken zijn naar de twee gegeven punten, een gegeven afstand verschillen en de plaats te bepalen en te beschrijven waarop het gezochte punt ligt.
Laten de twee gegeven punten *A* en *B* zijn en laat de opdracht zijn een derde punt te vinden, zeg *C*, zodat de getrokken lijnstukken *CA* en *CB* een gegeven afstand *FG* of *AD* [3.21] verschillen.

gulum HMG $\infty\ \frac{eezz}{aa} - \frac{eea^4}{b^4}$: hinc cum ex natura Hyperboles sit ut latus rectum ad transversum, sive ut bb ad ee, ita ME quadratum, id est, vv, ad prædictum rectangulum HMG: erit $\frac{eevv}{bb}\ \infty\ \frac{eezz}{aa} - \frac{eea^4}{b^4}$, &, multiplicatis omnibus terminis per aa, factoque per ee diviso, $\frac{aavv}{bb}\ \infty\ zz - \frac{a^5}{b^4}$. Dein restituto $y - \frac{a^3}{bb}$ in locum ipsius z, exurget $\frac{aavv}{bb}\ \infty\ yy - \frac{2a^3y}{bb}$; adeoque, multiplicatis omnibus per bb, factoque diviso per aa, habebitur $vv\ \infty\ \frac{bbyy}{aa} - 2ay$. Denique restituto $x - \frac{by}{a}$ in locum ipsius v, expunctisque iis quæ se invicem destruunt, atque omnibus ritè ordinatis, fiet $xx + 2ay\ \infty\ \frac{2byx}{a}$. Quod fuit propositum.

PROBLEMA II.

Propositio 16.

Datis duobus punctis tertium invenire, à quo ad bina data ductæ rectæ lineæ dato differant intervallo, locumque determinare ac describere, quem quæsitum punctum contingat.

Sint data duo puncta A & B, oporteatque invenire tertium, utputa C, ita nempe ut ductæ rectæ CA, CB differant dato intervallo FG seu AD.

Quoniam in quæstione angulus datus non est, quò facilior sit operatio, assumatur rectus, ideoque à puncto C in rectam AB, quæ data puncta conjungit, productam, si opùs fuerit, intelligatur demissa perpendicularis, ut CE; tum, suppositis, juxta Regulam, AE & EC incognitis atque indeterminatis, assumptum angulum AEC comprehendentibus, tanquam cognitis ac determinatis, earum prior, nimirum AE, vocetur x, ac posterior, nempe EC, nominetur y, ipsa autem AB, seu datorum punctorum cognita distantia, vocetur a, & data FG sive AD exprimatur per b. Hinc cum BE sive (si punctum B cadat inter A & E) AE — AB, aut (si punctum E inter A & B cadat) AB — AE sit

[291, vervolg]

Aangezien bij dit vraagstuk de hoek niet gegeven is, nemen we, om de berekening te vereenvoudigen, aan dat deze recht is.

Daarom veronderstellen we dat vanuit het punt *C* de loodlijn, zeg *CE*, is neergelaten op het lijnstuk *AB* dat de gegeven punten verbindt, zonodig op het verlengde daarvan.

Vervolgens veronderstellen we, volgens de Regel, de onbekende en onbepaalde *AE* en *EC*, die de aangenomen hoek *AEC* insluiten, als bekend en bepaald [3.22]; de eerste daarvan, namelijk *AE*, wordt x genoemd en de laatste, namelijk *EC*, wordt y genoemd; *AB* zelf echter, oftewel de bekende afstand tussen de gegeven punten wordt a genoemd en de gegeven *FG* of *AD* wordt uitgedrukt door b.

Aangezien *BE* oftewel $AE - AB$ (indien het punt *B* tussen *A* en *E* valt) of $AB - AE$ (indien het punt *E* tussen *A* en *B* valt), gelijk is aan $|x - a|$ [3.23] en

[292] $AC = \sqrt{x^2 + y^2}$, maar $BC = \sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + y^2}$,

en aangezien $AC - AD = BC$, daarom zal de vergelijking luiden

$$\sqrt{x^2 + y^2} - b = \sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + y^2}$$

en na het uitvoeren van de passende bewerking om beide leden van de vergelijking van het wortelteken te bevrijden, en na overgebracht te hebben wat overgebracht moet worden, zal men krijgen

$$4b^2y^2 = 4a^2x^2 - 4b^2x^2 - 4a^3x + 4b^2ax + a^4 - 2b^2a^2 + b^4 .$$

Na deling door $4a^2 - 4b^2$ [3.24] krijgt men daaruit

$$\frac{b^2y^2}{a^2 - b^2} = x^2 - ax + \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4}.$$

Wanneer men vervolgens, volgens de Regel, stelt $v = x - \frac{a}{2}$, dan zal $x = v + \frac{a}{2}$ en dus zal gelden, indien men deze waarde heeft ingevuld in plaats van x en het kwadraat daarvan in plaats van x^2, en na die termen geschrapt te hebben die tegen elkaar wegvallen,

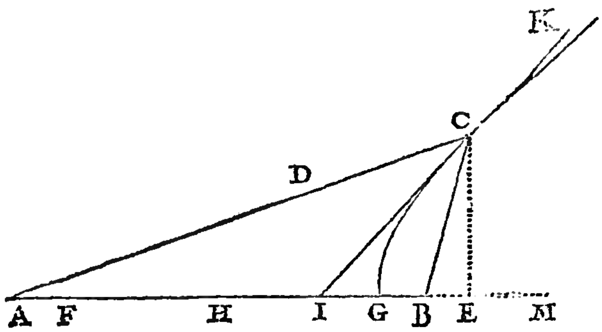
$$\frac{b^2y^2}{a^2 - b^2} = v^2 - \frac{b^2}{4}.$$

Dit is echter het geval van Stelling XII van dit boek en dus zal de gezochte plaats een hyperbool zijn.

Nu staat v in plaats van $x - \frac{a}{2}$; er geldt dus het volgende: indien men vanuit *A* in de richting van *E* een stuk $AH = \frac{a}{2}$ afpast, dan zal *H* volgens de Regel het middelpunt zijn en de halve transversale middellijn (zeg *HG* aan de ene kant en *HF* aan de andere kant) is gelijk aan $\sqrt{\frac{b^2}{4}}$, dat wil zeggen $\frac{b}{2}$. De transversale middellijn *FG*

$\infty\ x - a$, & A C $\infty \sqrt{xx+yy}$, at B C $\infty \sqrt{xx - 2ax + aa + yy}$; sitque A C — A D ∞ B C: æquatio erit
$\sqrt{xx+yy} - b \infty \sqrt{xx - 2ax + aa + yy}$, factâque operatione convenienti, ut utraque æquationis pars à signo radicali liberetur, & transpositis transponendis, erit
$4bbyy \infty 4aaxx - 4bbxx - 4a^3x + 4bbax + a^4 - 2bbaa + b^4$.
Vnde factâ divisione per $4aa - 4bb$ habebitur $\frac{bbyy}{aa-bb} \infty xx - ax + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$. Deinde assumpto juxta Regulam $v \infty x - \frac{1}{2}a$, erit $x \infty v + \frac{1}{2}a$, ideoque substituto hoc valore in locum ipsius x, atque ejusdem quadrato loco xx, expunctisque iis quæ se invi-

Fig. 1.



cem destruunt, erit $\frac{bbyy}{aa-bb} \infty vv - \frac{1}{4}bb$. Qui quidem casus est Theorematis 12^mi hujus libri, ac proinde Locus quæsitus erit Hyperbola. Cumque v assumpta sit pro $x - \frac{1}{2}a$, si ab A versùs E sumatur A H $\infty \frac{1}{2}a$, erit, juxta Regulam, H centrum, & semidiameter transversa (puta H G ab una, & H F ab altera parte,) $\infty \sqrt{\frac{1}{4}bb}$, id est, $\frac{1}{2}b$; ita ut diameter transversa F G (quæ quidem, ob applicatam C E ad diametrum H E perpendicularem, transversus quoque axis est,) sit $\infty\ b$. Ratio autem transversæ diametri ad parametrum, seu quadrati transversæ ad quadratum secundæ diametri, erit ut bb ad $aa - bb$. Vnde per ea quæ libri primi capitibus secundo & ultimo exposita sunt Hyperbolam ipsam describere haud difficile erit. Porrò cum quadratum semidiame-

[292, vervolg]
is daardoor gelijk aan b. Omdat de geordend aangebrachte rechte CE loodrecht staat op de middellijn HE, is deze transversale middellijn ook de as. De verhouding echter van de transversale middellijn tot de parameter, of die van het vierkant op de transversale middellijn tot het vierkant op de tweede middellijn, zal zijn als die van b^2 tot $a^2 - b^2$. Dus zal het op grond van wat in het tweede en in het laatste hoofdstuk van het eerste boek uiteengezet is, niet moeilijk zijn de hyperbool zelf te beschrijven [3.25]. Verder zal, omdat het vierkant op de halve transversale middellijn
[293] gelijk is aan $\frac{b^2}{4}$, het vierkant op de halve tweede middellijn gelijk zijn aan $\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4}$. Omdat echter FB, oftewel $BH + HF$, gelijk is aan $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$ en BG, oftewel $BH - HG$, gelijk is aan $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$, zal ook de rechthoek FBG gelijk zijn aan $\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4}$ en dat is immers gelijk aan het vierkant op de halve tweede middellijn of, zoals de Ouden zeiden, gelijk aan het vierde deel van de 'figuur' die aangepast is aan de transversale as [3.26]. Daarom zijn de punten A en B juist die, welke algemeen de brandpunten of de navelpunten van de tegengestelde hyperbolen genoemd worden en hieruit blijkt dat uit de veronderstellingen de juiste conclusies getrokken worden [3.27].

Gevolg 1.

Indien vanuit een punt dat willekeurig op een hyperbool is aangenomen, lijnstukken getrokken worden naar elk van de navelpunten, dan zal het grootste daarvan het kleinste overtreffen met de lengte van de transversale as.
Ofschoon de waarheid van het bovenstaande gevolg uit het voorafgaande volkomen duidelijk blijkt, zal het naar mijn mening juist wel nuttig zijn dit hier op een andere wijze aan te tonen met een uniek bewijs, dat ook nog korter en vrij eenvoudig is, daar dit, voor zover ik weet, tot nu toe door Ouderen en Jongeren (nl. wiskundigen, vert.) slechts langs veel omwegen en met een lange aaneenschakeling van moeilijke stellingen bewezen is [3.28].
Laat dan GC een willekeurige hyperbool zijn, met middelpunt H, transversale as FG en navelpunten A en B en zodanig dat de rechthoek FBG, evenals ook GAF, gelijk is aan het vierkant op de halve tweede middellijn [3.29].
Wanneer men nu vanuit een willekeurig punt C op de kromme de lijnstukken CA en CB trekt naar de punten A en B, dan moet men daarna CE geordend op de as aanbrengen en ervoor zorgen dat HE staat tot HM zoals HF staat tot HA, zodat dus[1] de rechthoek AHE gelijk is aan de rechthoek FHM [3.30].

---

[1]VI, 16; [2]op grond van de veronderstelling en prop. 10, Lib. I, blz. [196]; [3]II, 6; [4]Aangezien de som van alle voorgaande termen staat tot de som van alle volgende termen zoals een voorgaande tot een volgende, op grond van V, 12 (dat wil zeggen: als $a : b = c : d$, dan geldt $(a + c) : (b + d) = a : b = c : d$, vert.). [5]II, 6; [6]op grond van de constructie en VI, 22; [7]V, 9 en 11.

diametri tranſverſæ ſit $\infty \frac{1}{4} bb$, erit quadratum ſemi-ſecundæ diametri $\infty \frac{1}{4} aa - \frac{1}{4} bb$. Atqui cum FB ſive BH + HF ſit $\infty \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b$, & BG ſive BH — HG $\infty \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b$, erit quoque rectangulum FBG $\infty \frac{1}{4} aa - \frac{1}{4} bb$, nempe ∞ quadrato ſemi-ſecundæ diametri, ſive, ut Veteres loquebantur, æquale quadranti figuræ ad tranſverſum axem factæ: ideoque puncta A & B ea ipſa ſunt, quæ vulgo oppoſitarum Hyperbolarum Foci ſive Vmbilici nuncupantur. Vnde apparet, ex præmiſſis rectè inferri, quæ ſequuntur.

Corollarium 1.

Si ab aſſumpto utcunque in Hyperbola puncto ad utrumque Vmbilicum rectæ ducantur, earum major minorem longitudine tranſverſi axis ſuperabit.

Etiamſi veritas præcedentis Corollarii ex antedictis omnino conſtet, cum tamen illud à Veteribus, Recentioribuſvè, quòd ſciam, non niſi per multas ambages longâque difficilium Theorematum concatenatione hactenus demonſtratum ſit: id ipſum hîc demonſtratione unicâ, & quidem breviore ſatisque ſimplici, aliter oſtendiſſe non inutile fortè judicabitur.

Eſto igitur Hyperbola quælibet GC, cujus centrum H, tranſverſus axis FG, atque Vmbilici A & B, adeoque rectangulum FBG ut & GAF ſemi-ſecundæ diametri quadrato æquale. Ductis autem ab aſſumpto quolibet curvæ puncto C ad puncta A & B rectis CA, CB, ordinatim ad axem applicetur CE, fiatque ut HF ad HA, ita HE ad HM, ideoque [1] AHE rectangulo æquale rectangulum FHM. Vnde cum ſit [2], ut

HFq ad GAF, ita FEG ad CEq: erit quoque, per compoſ. rationis contrariam, ut

HFq ad (HFq + GAF, id eſt [3], ad) HAq; ita FEG ad FEG + CEq; adeoque [4] ut

HFq ad HAq, ita (HFq + FEG ſive [5]) HEq ad HAq + FEG + CEq. Eſt autem quoque [6], ut

HFq ad HAq, ita HEq ad HMq. Quocirca [7].

HM$q \infty$ HAq + FEG + CEq; hoc eſt, addito utrinque HFq ſeu HGq, erit

[1] per 16 ſexti.
[2] ex hyp. & per 10 primi hujus.
[3] per 6 ſecundi.
[4] cum ſit ut una antecedentium ad unam conſeq, ita omnes antecedentes ad omnes conſeq. per 12 quinti.
[5] per 6 ſecundi.
[6] ex conſtructione & per 22 ſexti.
[7] per 9 & 11 quinti.

[293, vervolg]
Aangezien geldt[2] dat FEG staat tot CE^2 zoals HF^2 staat tot GAF, zal ook, op grond van de tegenhanger van vereniging van een verhouding [3.30], gelden dat FEG staat tot $(FEG + CE^2)$ zoals HF^2 staat tot $(HF^2 + GAF)$ en dit laatste is[3] HA^2, zodat dus ook[4] $(HF^2 + FEG)$, oftewel[5] HE^2, staat tot $(HA^2 + FEG + CE^2)$, zoals HF^2 staat tot HA^2. Er geldt echter ook[6] dat HE^2 staat tot HM^2 zoals HF^2 staat tot HA^2. Dus[7] geldt: $HM^2 = HA^2 + FEG + CE^2$; dat wil zeggen, als men aan beide kanten HF^2 of HG^2 bijtelt, dan zal

[294] $$HM^2 + HF^2 = HA^2 + (HF^2 + FEG) \text{ [d.i.}^1\ HE^2] + CE^2$$

of

$$HM^2 + HG^2 = HB^2 + (HF^2 + FEG) \text{ [d.i.}^1\ HE^2] + CE^2.$$

Wanneer men aan elk van beide kanten van de vergelijking gelijke termen heeft bijgeteld of afgetrokken, namelijk $2FHM$, of $2GHM$, aan de ene kant en $2AHE$, of $2BHE$, aan de andere kant, dan komt er[2]

$$FM^2 = (AE^2 + CE^2) \text{ [d.i.}^3\ AC^2] \text{ en evenzo}^4$$

$$GM^2 = (BE^2 + CE^2) \text{ [d.i.}^5\ BC^2].$$

Aangezien daaruit volgt dat $FM = AC$ en $GM = BC$ en omdat FG tevens het verschil is van FM en GM, is het duidelijk dat ook de grootste van AC en BC de kleinste overtreft met de lengte van FG en dat is juist de transversale as.
Hetgeen te bewijzen was.

Gevolg 2

Wanneer men vanuit een willekeurig punt op een hyperbool lijnen trekt naar elk van beide navelpunten, dan raakt de lijn die de hoek tussen deze rechten halveert, in dit punt aan de kromme en omgekeerd.

Indien immers de lijn ICK die de hoek ACB halveert, de hyperbool niet raakt in het punt C dan zal deze lijn de hyperbool snijden, indien dit mogelijk is, en laat van deze lijn nu tenminste één punt daarop, zeg K, binnen de hyperbool liggen.

---

[1]II, 6; [2]II, 4; [3]I, 47; [4]II, 7; [5]I, 47.

[1] per 6 ſecundi.

$$HMq + \left\{\begin{array}{c}HFq\\ \text{ſeu}\\ HGq\end{array}\right. \infty \left\{\begin{array}{c}HAq\\ \text{ſeu}\\ HBq\end{array}\right. + (HFq + FEG, \text{i.e.}^{1})\, HEq, + CEq.$$

Hinc additis vel ſublatis ab utraque æquationis parte æqualibus,

[2] per 4 ſecundi.

nimirum $\left\{\begin{array}{c}FHM\\ \text{ſeu}\\ GHM\end{array}\right.$ bis ab una, & $\left\{\begin{array}{c}AHE\\ \text{ſeu}\\ BHE\end{array}\right.$ bis ab altera parte: erit [2]

[3] per 47 primi.
[4] per 7 ſecundi.
[5] per 47 primi.

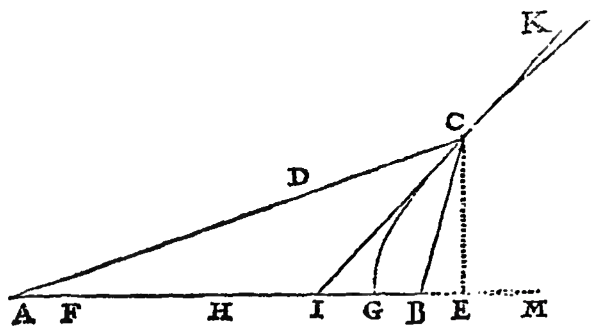
FMq ∞ (AEq + CEq, id eſt [3]) ACq; itemque [4] GMq ∞ (BEq + CEq, id eſt [5]) BCq. Cumque propterea FM ſit ∞ AC; & GM ∞ BC; ſitque ipſarum FM & GM differentia FG, manifeſtum eſt ipſarum quoque AC & BC majorem ſuperare minorem, ejuſdem FG, nempe axis tranſverſi, longitudine. Quod demonſtrandum erat.

Corollarium 2.

Ductis à quolibet Hyperbolæ puncto ad utrumque Vmbilicum rectis, quæ angulum iis comprehenſum biſariam dividit linea curvam in eodem puncto contingit; & converſim.

Si enim quæ angulum ACB bifariam dividit recta ICK non contingat Hyperbolam in C puncto, ſecet eandem, ſi fieri poteſt,

Fig. 1.



atque ita ſaltem aliquo ſui puncto, veluti K, intra Hyperbolam ſit.

Tum

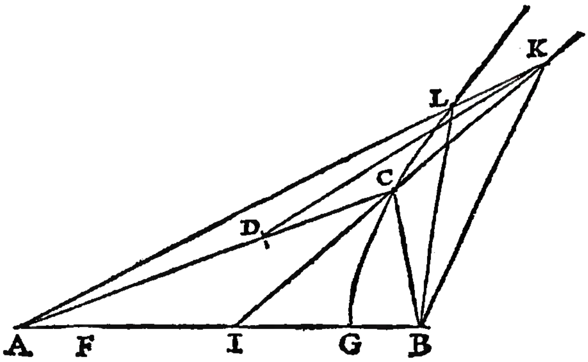
[295] Wanneer men dan de rechten *KB*, *KD* [3.31] en *KA* getrokken heeft (waarvan de laatste de hyperbool snijdt in *L* van waaruit *BL* naar *B* getrokken is), dan geldt het volgende: aangezien in de driehoeken *DCK* en *BCK* de zijden *DC* en *CK* respectievelijk gelijk zijn aan *BC* en *CK* en gelegen zijn om[1] gelijke hoeken, [3.32] daarom zal ook de basis *DK* gelijk zijn aan de basis *BK*.
Omdat verder op grond van het voorafgaande gevolg *AL LB* overtreft met het interval *AD* en dit dus ook geldt voor *AK* en de som van de lijnstukken *BL* en *LK*, en omdat *BK* en dus ook *KD* kleiner is dan *BL* en *LK* tezamen, daarom zal dientengevolge *AK KD* overtreffen met een lengte die meer is dan die van *AD*, dat wil zeggen *AK* zal groter zijn dan de beide lijnstukken *KD* en *DA* tezamen [3.33].
Omdat dit zeer ongerijmd is[2], snijdt de rechte *ICK* de hyperbool niet, maar raakt hij deze in het punt *C*.
En omdat in dit punt *C* geen andere rechte

---

[1]Aangezien immers volgens de veronderstelling de hoeken *ACI* en *BCI* als gelijk worden aangenomen, zullen ook de hoeken *ACK* en *BCK* (hun nevenhoeken) gelijk zijn op grond van I, 13; [2]I, 20.

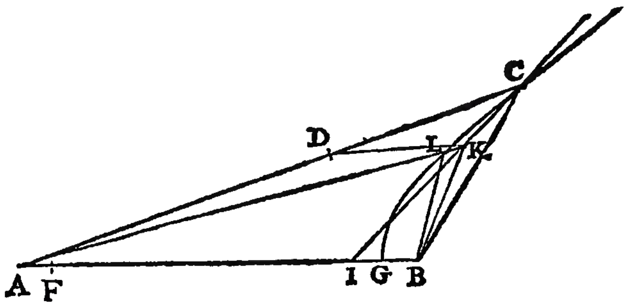
Tum ductis KB, KD, & KA (quarum posterior Hyperbolam secet in L, à quo ad B ducta sit BL), cum in triangulis DCK, BCK latera DC, CK lateribus BC, CK utrumque utrique,

Fig. II.



circa [1] æquales angulos, æqualia sint, erit quoque basis DK basi BK æqualis. Cumque porrò, juxta Corollarium præcedens, AL ipsam LB, ideoque & AK rectas BL, LK, simul sumptas, superet intervallo AD; sitque BK, ideoque & KD, ipsis BL, LK simul sumptis minor: per consequens AK eandem KD majori longitudine quàm est AD excedet, id est, ipsa AK binis re-

Fig. III.



ctis KD, DA simul sumptis major erit. Quod cum absurdissimum sit [2], non secat Hyperbolam recta ICK, sed eandem contingit in C puncto. Cumque non possit in eodem puncto C alia

recta,

[1] Cum enim ex hypothesi anguli ACI & BCI æquales ponantur, erunt quoque anguli ACK & BCK, qui ipsis sunt deinceps, per 13 primi æquales.

[2] *per 20 primi.*

[296] dan ICK[1] de hyperbool kan raken, daarom is het duidelijk dat de raaklijn in C ook de hoek ACB halveert (de tekst vermeldt ten onrechte ABC, vert.).

Voorbeeld van herleiding van vergelijkingen tot de gedaante van Stelling XIV

Indien de vergelijking luidt: $y^2+\frac{2bxy}{a}-2cy=-x^2+dx+k^2$ en men volgens de Regel stelt $z=y-c+\frac{bx}{a}$, dat wil zeggen $y=z+c-\frac{bx}{a}$ en dit invult in plaats van y en het kwadraat daarvan in plaats van y^2 en de termen schrapt die tegen elkaar wegvallen, dan zal gelden

$$z^2-\frac{b^2x^2}{a^2}+\frac{2bcx}{a}-c^2=-x^2+dx+k^2,$$

dat wil zeggen na passende omzetting zal gelden

$$z^2=-x^2+\frac{b^2x^2}{a^2}+dx-\frac{2bcx}{a}+c^2+k^2 \text{ oftewel}$$

$$z^2=\frac{-a^2x^2+b^2x^2}{a^2}+\frac{dax-2bcx}{a}+c^2+k^2.$$

Wanneer men nu a groter onderstelt dan b, alle termen van de vergelijking vermenigvuldigt met a^2 en het resultaat deelt door a^2-b^2 [3.34], zodat de grootheid x^2 zonder breuk voorkomt, dan zal gelden

$$\frac{a^2z^2}{a^2-b^2}=-x^2+\frac{da^2x-2bacx}{a^2-b^2}+\frac{c^2a^2+k^2a^2}{a^2-b^2}.$$

Indien men dan, om de berekening te vergemakkelijken, in plaats van $\frac{da^2-2bac}{a^2-b^2}$ invult $2h$, dan zal de vergelijking luiden $\frac{a^2z^2}{a^2-b^2}=-x^2+2hx+\frac{c^2a^2+k^2a^2}{a^2-b^2}$

oftewel $\frac{a^2z^2}{a^2-b^2}+x^2-2hx=\frac{c^2a^2+k^2a^2}{a^2-b^2}$.

Indien men dan volgens de Regel stelt $v=x-h$, oftewel $x=v+h$ en dit invult in plaats van x en het kwadraat daarvan in plaats van x^2 en de termen wegstreept die elkaar opheffen, dan ontstaat

$$\frac{a^2z^2}{a^2-b^2}+v^2-h^2=\frac{c^2a^2+k^2a^2}{a^2-b^2}.$$

[1] gevolg 3 van prop. 6, Lib. I, blz. [191].

recta Hyperbolam contingere quàm I C K [r], manifestum est conversim, eam, quæ Hyperbolam in C contingit, angulum quoque A B C bifariam dividere.

[r] per 3 Corol. 6 primi hujus.

Exemplum reductionis æquationum ad formulam Theorematis XIV.

Si æquatio sit $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy \infty - xx + dx + kk$, assumpto juxta Regulam $z \infty y - c + \frac{bx}{a}$, hoc est, $y \infty z + c - \frac{bx}{a}$, eoque substituto in locum ipsius y, ejusdemque quadrato loco yy, sublatisque iis, quæ se invicem destruunt, erit $zz - \frac{bbxx}{aa} + \frac{2bcx}{a} - cc \infty - xx + dx + kk$. id est, factâ decenti transpositione, erit $zz \infty - xx + \frac{bbxx}{aa} + dx - \frac{2bcx}{a} + cc + kk$ sive $zz \infty \frac{-aaxx + bbxx}{aa} + \frac{dax - 2bcx}{a} + cc + kk$. Supposito autem a majore quàm b, ac multiplicatis omnibus æquationis terminis per aa, productoque diviso per $aa - bb$, ut quantitas xx absque fractione inveniatur, erit $\frac{aazz}{aa - bb} \infty - xx \frac{+ daax - 2bacx}{aa - bb} + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Iam verò si facilioris operationis gratiâ loco $\frac{daa - 2bac}{aa - bb}$ substituatur $2h$: erit æquatio $\frac{aazz}{aa - bb} \infty - xx + 2hx + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$, aut $\frac{aazz}{aa - bb} + xx - 2hx \infty \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$.

Hinc si juxta Regulam assumatur $v \infty x - h$ sive $x \infty v + h$, atque hoc in locum ipsius x, ejusque quadratum loco xx substituatur, ac expungantur quæ se invicem destruunt, habebitur $\frac{aazz}{aa - bb} + vv - hh \infty \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Hoc est, factâ decenti transpositione, erit $\frac{aazz}{aa - bb} \infty - vv + hh + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Atque ita apparet æquationem esse reductam ad formulam Theorematis XIV, ideoque Locum quæsitum aut Ellipsin aut Circuli circumferentiam existere. Rursus verò facilioris operationis ergo loco $\frac{aa}{aa - bb}$ scribatur $\frac{l}{g}$, & loco $hh + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$ scribatur ff, ita ut æquatio sit talis $\frac{lzz}{g} \infty ff - vv$.

Ad

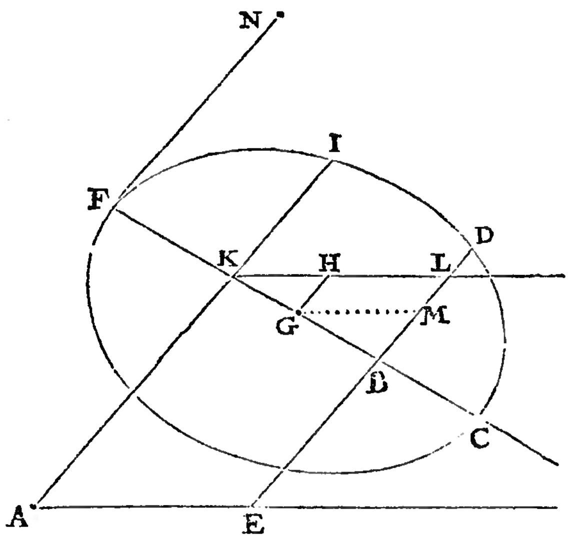
[296, vervolg]
Dit betekent dat na passende omzetting zal gelden

$$\frac{a^2z^2}{a^2-b^2}=-v^2+h^2+\frac{c^2a^2+k^2a^2}{a^2-b^2}.$$

Zo is het duidelijk dat de vergelijking is herleid tot de gedaante van Stelling XIV en dat de gezochte plaats dus een ellips of een cirkelomtrek blijkt te zijn.
Ook hier wordt weer, om de berekening te vergemakkelijken, in plaats van $\frac{a^2}{a^2-b^2}$ geschreven $\frac{l}{g}$ en f^2 in plaats van $h^2+\frac{c^2a^2+k^2a^2}{a^2-b^2}$ zodat de vergelijking er als volgt gaat uitzien: $\frac{lz^2}{g}=f^2-v^2$.

[297] Om de genoemde plaats nu in detail te bepalen en te beschrijven, nemen we aan dat in bijgevoegde figuur het punt A het vaste begin is van x en dat deze x zich langs de lijn AE vanaf A in de richting van E onbeperkt uitstrekt en dat de gegeven of aangenomen hoek die y en x insluiten, gelijk is aan de hoek EAK of het supplement daarvan.
Omdat $z=y-c+\frac{bx}{a}$, moet men dus, als men onderstelt dat y boven de lijn AE uitsteekt, ook boven deze rechte (AE, vert.) de rechte KL trekken, daaraan evenwijdig en wel zó dat het deel van de rechte AK en de delen van alle daaraan evenwijdige lijnen, bevat tussen de genoemde AE en KL, zoals AK, EL etc. gelijk zijn aan de bekende c; vervolgens moet men ook door het punt K, onder de rechte KL, de rechte KB trekken, onder zodanige hoek dat de delen van alle rechten, evenwijdig aan AK, die bevat zijn tussen KL en KB (zoals LB), tot die delen van KL die bevat zijn tussen deze evenwijdige lijnen en het punt K (zoals bijvoorbeeld LK), dezelfde verhouding hebben als die er bestaat tussen b en a, dat wil zeggen zodanig dat KL staat tot LB zoals a staat tot b [3.35].
Wanneer we dan KL of AE, onbeperkt aangenomen, op x stellen, dan zullen LB en alle daaraan evenwijdige lijnstukken, bevat tussen KL en KB, gelijk zijn aan $\frac{bx}{a}$.
Uit het voorafgaande blijkt dus dat de middellijn zal liggen op de rechte KB,

Ad peculiarem autem prædicti Loci determinationem ac deſcriptionem eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile A punctum, atque eadem x ſe in linea A E ab A versùs E indefinitè extendere intelligatur, ſitque angulus datus vel aſſumptus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A K vel ejuſdem ad duos rectos complemento. Hinc quoniam $z \infty y - c + \frac{bx}{a}$, ſi y ſupra lineam A E exſurgere intelligatur, ducenda quoque eſt ſupra ipſam recta K L eidem parallela, ita ut pars rectæ A K omniumque ipſi æquidiſtantium inter prædictas A E & K L intercepta, veluti A K,



E L, &c. æquetur c cognitæ: ac deinde per punctum K infra rectam K L ducenda eſt recta K B in tali angulo, ut rectarum omnium ipſi A K parallelarum partes, quæ inter K L & K B intercipiuntur (veluti L B) ad partes ipſius K L, inter eaſdem parallelas & punctum K interceptas (ut verbi gratiâ L K) eandem habeant rationem, quæ eſt inter b & a, hoc eſt, ut ſit uti a ad b, ita K L ad L B. Atque ita poſitâ K L ſive A E, indefinitè ſumptâ, ∞x, L B omneſque ipſi parallelæ inter K L & K B interceptæ erunt $\frac{bx}{a}$. Vnde ex prædictis conſtat diametrum fore in recta K B,

[298] waarbij de daarop geordend aangebrachte rechten evenwijdig zijn aan *AK*. Verder moet, omdat $v = x - h$, *KH* afgetrokken worden van het lijnstuk *KL* of *AE*, waarbij deze *KH* gelijk is aan h en dus *HL*, eveneens onbeperkt genomen, gelijk is aan $x - h$, oftewel v. Vervolgens moet *HG* door het punt *H* getrokken worden, evenwijdig aan *AK*, die (dat wil zeggen *HG*, vert.) de gevonden middellijn in *G* snijdt en dan zal dit snijpunt *G* het middelpunt van de gezochte ellips zijn. Omdat van de gelijkvormige driehoeken *KHG* en *KLB* de verhouding van de zijde *KH* tot *HG* oftewel van *KL* tot *LB* bekend is, evenals de hoek die door deze zijden wordt ingesloten – deze is immers gelijk aan de gegeven of aangenomen hoek *EAK* – daarom zal ook de verhouding van de zijde *KH* tot de zijde *KG* oftewel van *KL* tot *KB* bekend zijn; we stellen deze op de verhouding van de bekende a tot een eveneens bekende e. Aangezien *HL*, of *GM*, die volgens onderstelling evenwijdig loopt aan *HL*, onbeperkt aangenomen, gelijk is aan v, zal *GB*, eveneens onbeperkt aangenomen, dus elk willekeurig stuk van de middellijn bevat tussen het middelpunt en een willekeurige geordend aangebrachte rechte, gelijk zijn aan $\frac{ev}{a}$.

Het kwadraat van dit tussenstuk (*GB*, vert.) vormt echter in de formule van Stelling XIV de laatste term van de vergelijking, daarom moet de bovenstaande vergelijking [3.36] zo herleid worden dat de laatste term daarvan $\frac{e^2v^2}{a^2}$ wordt; dit zal bereikt zijn indien elk van de termen van de vergelijking vermenigvuldigd wordt met e^2 en het resultaat gedeeld wordt door a^2. Dan immers zal de vergelijking de volgende gedaante hebben:

$$\frac{le^2z^2}{ga^2} = \frac{f^2e^2}{a^2} - \frac{e^2v^2}{a^2}.$$

Hieruit volgt: indien men volgens de Regel de halve dwarse zijde *GF* of *GC* stelt op $\sqrt{\frac{e^2f^2}{a^2}}$, dat is op $\frac{ef}{a}$, en de verhouding van de dwarse zijde *CF* tot de rechte zijde *FN* op $le^2 : ga^2$, en men met deze zijden en met de middellijn en het middelpunt die zojuist gevonden zijn, een ellips *FDC* beschrijft die de rechte *AE* of *AK* na verlenging snijdt in *I*, dan zal de kromme *IDC* de gezochte plaats zijn [3.37].

Wanneer men immers daarop willekeurig een punt, zeg *D*, neemt en *DE* evenwijdig aan *AK* trekt, welke *DE*, zo nodig na verlenging, de rechten *KL* en *KB* in *L* en *B* snijdt en men het lijnstuk *DE* y noemt, dan zal gelden

$$DB = DE - EL + LB = y - c + \frac{bx}{a} = z.$$

Zoals zoëven is opgemerkt, geldt $GB = \frac{ev}{a}$ en volgens constructie is *GF* of *GC* gelijk aan $\frac{ef}{a}$ en dus $FB = \frac{ef}{a} + \frac{ev}{a}$ en $BC = \frac{ef}{a} - \frac{ev}{a}$

298 ELEM. CVRVARVM

ad quam ordinatim applicatæ sint ipsi A K æquidistantes. Iam verò cum v sit $\infty\ x - h$, à recta K L sive A E auferenda est K H, ita ut eadem K H sit $\infty\ h$, ideoque H L indefinitè quoque sumpta $\infty\ x - h$ seu v. Deinde per punctum H ducenda est H G ipsi A K parallela, secans inventam diametrum in G, eritque idem intersectionis punctum G quæsitæ Ellipseos centrum. Porrò quoniam similium triangulorum K H G & K L B nota est ratio lateris K H ad H G sive K L ad L B, ut & angulus sub iisdem lateribus contentus, utpote æqualis angulo dato vel assumpto E A K, erit quoque nota ratio lateris K H ad latus K G sive K L ad K B, quæ ponatur ut a cognitæ ad e itidem cognitam. Ideoque cum H L sive G M, quæ ipsi H L parallela intelligitur, indeterminatè sumpta sit $\infty\ v$, erit G B, similiter indeterminatè sumpta, hoc est, quælibet diametri portio inter centrum & quamlibet ordinatim applicatam intercepta, $\infty\ \frac{ev}{a}$. Cujus quidem interceptæ quadratum cum in formula Theorematis XIV ultimum æquationis terminum constituat, æquatio supra exposito modo ita reducatur, ut terminus ejus extremus fiat $\frac{eevv}{aa}$, id quod factum erit, si singuli æquationis termini multiplicentur per ee, productumque dividatur per aa. inde enim sequenti modo se habebit æquatio $\frac{leezz}{gaa} \infty \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$. Hinc si juxta Regulam semi-latus transversum G F vel G C fiat $\infty \sqrt{\frac{eeff}{aa}}$, id est, $\frac{ef}{a}$, & ratio transversi lateris C F ad rectum latus F N, ut lee ad gaa, iisdemque lateribus, ac diametro, centroque, modò inventis, Ellipsis describatur F D C, secans rectam A E vel A K productam in I: erit curva I D C Locus quæsitus.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi A K parallelâ, ac si opùs sit productâ ut secet rectas K L & K B in L & B, si eadem D E vocetur y, erit D B, hoc est, D E — E L + L B $\infty\ y - c + \frac{bx}{a}$ seu z. Est autem ut jam annotatum est G B $\infty\ \frac{ev}{a}$, atque ex constructione G F vel G C $\infty\ \frac{ef}{a}$, ideoque F B $\infty\ \frac{ef}{a} + \frac{ev}{a}$, & B C $\infty\ \frac{ef}{a} - \frac{ev}{a}$, ac rectangulum F B C $\infty\ \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$. Hinc cum ex natura Ellipsis sit ut N F ad F C, hoc est,

ut

[298, vervolg]
en voor de rechthoek FBC geldt:

$$FBC = \frac{f^2e^2}{a^2} - \frac{e^2v^2}{a^2}.$$

Omdat uit de aard van de ellips [3.5] volgt dat het vierkant op DB, dus z^2, staat tot
[299] de genoemde rechthoek FBC, zoals NF staat tot FC, dat is zoals ga^2 staat tot le^2, daarom zal

$$\frac{le^2z^2}{ga^2} = \frac{f^2e^2}{a^2} - \frac{e^2v^2}{a^2},$$

en dus, na vermenigvuldiging van alle termen met a^2 en deling door e^2, zal gelden

$$\frac{lz^2}{g} = f^2 - v^2$$

en dus, na weer gesubstitueerd te hebben $x - h$ in plaats van v,

en $\quad h^2 + \dfrac{c^2a^2 + k^2a^2}{a^2 - b^2}$ in plaats van f^2,

alsook van

$\dfrac{a^2}{a^2 - b^2}$ in plaats van $\dfrac{l}{g}$, zal gelden

$$\frac{a^2z^2}{a^2 - b^2} = h^2 + \frac{c^2a^2 + k^2a^2}{a^2 - b^2} - x^2 + 2hx - h^2,$$

oftewel

$$\frac{a^2z^2}{a^2 - b^2} + x^2 - 2hx = \frac{c^2a^2 + k^2a^2}{a^2 - b^2}.$$

Wanneer men dan nog schrijft

$\dfrac{da^2 - 2bca}{a^2 - b^2}$ in plaats van $2h$, dan zal

$$\frac{a^2z^2}{a^2 - b^2} + x^2 + \frac{-da^2x + 2bcax}{a^2 - b^2} = \frac{c^2a^2 + k^2a^2}{a^2 - b^2},$$

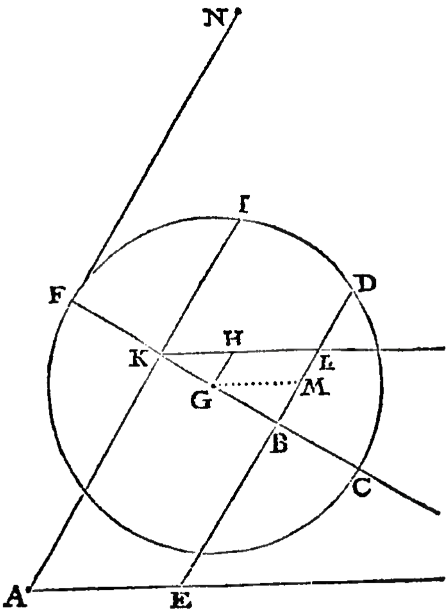
zodat na vermenigvuldiging met $a^2 - b^2$ en deling door a^2, zal gelden

$$z^2 + x^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} - dx + \frac{2bcx}{a} = c^2 + k^2.$$

Wanneer men tenslotte z weer vervangen heeft door $y - c + \dfrac{bx}{a}$ en de termen geschrapt heeft die elkaar opheffen en alles naar behoren heeft gerangschikt, krijgt men:

$$y^2 + \frac{2bxy}{a} - 2cy = -x^2 + dx + k^2.$$

ut gaa ad lee, ita DB quadratum, hoc est, zz ad prædictum rectangulum FBC; erit $\frac{leezz}{gaa} \infty \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$, id est, multiplicatis omnibus per aa, ac divisis per ee, erit $\frac{lzz}{g} \infty ff - vv$, ideoque restituto $x - h$ loco v, atque $hh + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$ loco ff, ut & $\frac{aa}{aa - bb}$ loco $\frac{l}{g}$, erit $\frac{aazz}{aa - bb} \infty hh + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb} - xx + 2hx - hh$, hoc est, $\frac{aazz}{aa - bb} + xx - 2hx \infty \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Porrò restituto $\frac{daa - 2bca}{aa - bb}$ loco $2h$, fiet $\frac{aazz}{aa - bb} + xx \frac{- daax + 2bcax}{aa - bb} \infty \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$, id est, factâ multiplicatione per $aa - bb$ ac divisione per aa, erit $zz + xx - \frac{bbxx}{aa} - dx + \frac{2bcx}{a} \infty cc + kk$. Ac denique loco z factâ restitutione ipsius $y - c + \frac{bx}{a}$, deletisque iis quæ se invicem tollunt, ac omnibus ritè ordinatis, obtinebitur $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy \infty - xx + dx + kk$. Quod determinandum ac demonstrandum erat.



Notandum porrò hîc est, quòd si angulus AKB foret rectus, ac proinde ordinatim applicatæ, ut DB, KI, &c. ad diametrum KB perpendiculares, ac simul FN æqualis FC, prædictam curvam fore Circulum, quemadmodum ex elementis perspicuum est.

[299, vervolg]

Hetgeen te bepalen en te bewijzen was.

Verder moet hier nog worden opgemerkt, dat, indien de hoek *AKB* recht zou zijn en dus de geordend aangebrachte rechten, zoals *DB*, *KI*, etc. loodrecht zouden staan op de middellijn *KB* en tegelijkertijd *FN* gelijk zou zijn aan *FC*, de genoemde kromme een cirkel zou zijn, hetgeen uit elementaire overwegingen duidelijk is [3.38].

[300]

VRAAGSTUK III

Propositie 17

Bij twee gegeven punten een derde punt te vinden met de eigenschap dat de lijnstukken die van daaruit getrokken zijn naar de twee gegeven punten, tezamen een gegeven lengte hebben, en de plaats te bepalen en te beschrijven waarop het gezochte punt ligt.

Laten de twee gegeven punten *A* en *B* [3.39] zijn en laat de opdracht zijn een derde punt te vinden, zeg *C*, zodat de getrokken lijnstukken *CA* en *CB* tezamen gelijk zijn aan een gegeven lijnstuk *D*

Aangezien bij dit vraagstuk de hoek niet gegeven is, nemen we deze, om de berekening te vergemakkelijken, als recht aan. Daarom veronderstellen we dat vanuit het punt *C* de loodlijn, zeg *CE*, is neergelaten op het lijnstuk *AB* dat de gegeven punten verbindt, zonodig op het verlengde daarvan.

Vervolgens veronderstellen we, volgens de Regel, de onbekende en onbepaalde *AE* en *EC*, die de aangenomen rechte hoek *AEC* insluiten, als bekend en bepaald; de eerste daarvan, namelijk *AE*, wordt x genoemd en de laatste, namelijk *EC*, wordt y genoemd; *AB* zelf echter, oftewel de bekende afstand tussen de gegeven punten, wordt a genoemd en de gegeven *D* wordt uitgedrukt door b.

Aangezien *BE* oftewel $AB - AE$ (indien het punt *E* tussen *A* en *B* valt) of $AE - AB$ (indien het punt *B* tussen *A* en *E* valt) gelijk is aan $|a-x|$ (zie [2.27]) en

$$AC = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{en } CB = \sqrt{a^2-2ax+x^2+y^2}$$

en aangezien $D - AC = CB$, daarom zal de vergelijking luiden

$$b - \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{a^2-2ax+x^2+y^2}$$

PROBLEMA III.

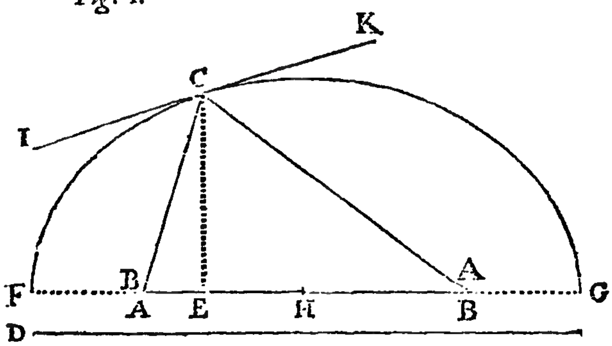
Propoſitio 17.

Datis duobus punctis tertium invenire, à quo ad bina data ductæ rectæ lineæ ſimul ſumptæ datæ longitudini æquales ſint; locumque determinare ac deſcribere, quem quæſitum punctum contingat.

Sint data duo puncta A & B, oporteatque invenire tertium, utputa C; ita nempe, ut ductæ rectæ C A, C B ſimul ſumptæ æquales ſint datæ rectæ lineæ D.

Quoniam in quæſtione angulus datus non eſt, quò facilior ſit operatio, aſſumatur rectus; ideoque à puncto C in rectam A B, quæ data puncta conjungit, productam, ſi opùs fuerit,

Fig. I.



intelligatur demiſſa perpendicularis, ut C E. Tum ſuppoſitis, juxta Regulam, A E & E C incognitis atque indeterminatis aſſumptum angulum rectum A E C comprehendentibus tanquam cognitis ac determinatis, earum prior, nimirum A E, vocetur x, ac poſterior, nempe E C, nominetur y; ipſa autem A B ſeu datorum punctorum diſtantia cognita appelletur a, & data D exprimatur per b. Hinc cum B E ſive (ſi punctum E cadat inter A & B) A B — A E, aut (ſi punctum B inter A & E cadat) A E — A B ſit $\infty\ a - x$; atque A C $\infty \sqrt{xx + yy}$; & C B $\infty \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$; ſitque D — A C ∞ C B: æquatio erit $b - \sqrt{xx + yy} \infty \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$; factâque operatione

[301] en na het uitvoeren van de passende bewerking, om beide leden van de vergelijking van het wortelteken vrij te maken, en na overgebracht te hebben wat overgebracht moet worden, zal men krijgen

$$4b^2x^2 - 4a^2x^2 - 4b^2ax + 4a^3x = b^4 - 2b^2a^2 + a^4 - 4b^2y^2.$$

Na deling door $4b^2 - 4a^2$ [3.40] krijgt men daaruit

$$x^2 - ax = \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2y^2}{b^2 - a^2}.$$

Wanneer men vervolgens, volgens de Regel, stelt $v = x - \frac{a}{2}$, dan zal $x = v + \frac{a}{2}$ en dus zal gelden, indien men deze waarde heeft ingevuld in plaats van x en het kwadraat daarvan in plaats van x^2 en na die termen geschrapt te hebben die tegen elkaar wegvallen,

$$v^2 = \frac{b^2}{4} - \frac{b^2y^2}{b^2 - a^2} \quad \text{oftewel} \quad \frac{b^2y^2}{b^2 - a^2} = \frac{b^2}{4} - v^2 \qquad [3.41]$$

Dit is echter het geval van Stelling 14 en dus is de gezochte plaats een ellips.

Nu is v genomen in plaats van $x - \frac{a}{2}$; indien men dus vanaf A in de richting van E afpast $AH = \frac{a}{2}$ dan zal, volgens de regel, H het middelpunt zijn en de halve transversale middellijn (zeg HF aan de ene kant en HG aan de andere kant) is gelijk aan $\frac{b}{2}$, zodat de transversale middellijn FG gelijk is aan b. Deze is echter ook de transversale as omdat de daarop geordend aangebrachte rechte CE er loodrecht op staat.

De verhouding nu van de transversale middellijn tot de parameter, oftewel die van het vierkant op de transversale middellijn tot het vierkant op de tweede middellijn, zal zijn als die van b^2 tot $b^2 - a^2$. Dus zal, op grond van wat in het derde en in het laatste hoofdstuk van het eerste boek uiteengezet is, de gezochte ellips zeer gemakkelijk beschreven kunnen worden.

Verder zal, omdat het vierkant op de halve transversale middellijn gelijk is aan $\frac{b^2}{4}$, het vierkant op de halve tweede middellijn gelijk zijn aan $\frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4}$. Maar omdat FB oftewel GA gelijk is aan $\frac{b}{2} + \frac{a}{2}$ en BG, oftewel AF, gelijk is aan $\frac{b}{2} - \frac{a}{2}$, zal ook de rechthoek FBG oftewel GAF, gelijk zijn aan $\frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4}$; dit is gelijk aan het vierkant op de halve tweede middellijn of, zoals de Ouden zeiden, gelijk aan het vierde deel van de 'figuur' die aangepast is aan de transversale as [3.42].

ne decenti, ut utraque æquationis pars à ſigno radicali liberetur, & tranſpoſitis tranſponendis, erit

$4bbxx - 4aaxx - 4bbax + 4a^3x \infty b^4 - 2bbaa + a^4 - 4bbyy$,

hoc eſt, factâ diviſione per $4bb - 4aa$, erit

$xx - ax \infty \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa - \frac{bbyy}{bb - aa}$. Aſſumpto deinde juxta Regulam $v \infty x - \frac{1}{2}a$, erit $x \infty v + \frac{1}{2}a$, câque ſubſtitutâ in locum ipſius x, ejuſdemque quadrato loco xx, expunctisque iis quæ ſe invicem deſtruunt: erit $xx \infty \frac{1}{4}bb - \frac{bbyy}{bb - aa}$, ſive $\frac{bbyy}{bb - aa} \infty \frac{1}{4}bb - xx$. Qui quidem caſus eſt Theorematis 13^{tii}, ac proinde Locus quæſitus Ellipſis. Cumque v aſſumpta ſit pro $x - \frac{1}{2}a$, ſi ab A versùs E ſumatur A H $\infty \frac{1}{2}a$: erit, juxta Regulam, H centrum, & ſemi-diameter tranſverſa (velut H F ab una, & H G ab altera parte) $\infty \frac{1}{2}b$; ita ut diameter tranſverſa F G (quæ quidem, ob applicatam C E ad eandem perpendicularem, tranſverſus quoque axis eſt,) ſit ∞b. Ratio autem tranſverſæ diametri ad parametrum, ſeu quadrati tranſverſæ ad quadratum ſecundæ diametri erit, ut bb ad $bb - aa$. Vnde per ea, quæ Capitibus tertio & ultimo libri primi expoſita ſunt, quæſita Ellipſis faciillimè deſcribetur. Porrò cum quadratum ſemi-diametri tranſverſæ ſit $\infty \frac{1}{4}bb$, erit quadratum ſemi-ſecundæ diametri $\infty \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$. Atqui cum F B ſeu G A ſit $\infty \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$, & B G ſeu A F $\infty \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, erit quoque rectangulum F B G ſeu G A F $\infty \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$, nempe æquale quadrato ſemi-ſecundæ diametri, ſive, ut Veteres loquebantur, æquale quadranti figuræ ad tranſverſum axem factæ. Ideoque puncta A & B ea ipſa ſunt, quæ vulgò Ellipſeos Foci ſive Vmbilici nuncupantur. Vnde apparet, ex præmiſſis rectè inferri, quæ ſequuntur.

Corollarium 1.

Quæ à quolibet in Ellipſi puncto ad utrumque Vmbilicum rectæ ducuntur, ſimul ſumptæ tranſverſo axi æquales ſunt.

Quemadmodum autem in Hyperbola ſuperiùs demonſtratum eſt, ductarum C A, C B differentiam tranſverſo axi F G æquari, ita & hîc earum aggregatum eidem tranſverſo axi æquale eſſe oſtendetur, nempe, ſi non per additionem & compoſitionem, ut

[301, vervolg]
Daarom zijn de punten A en B dezelfde die algemeen de brandpunten of de navelpunten van de ellips genoemd worden; hieruit blijkt dat uit de veronderstellingen de juiste conclusies getrokken worden.

Gevolg 1

De lijnstukken die vanuit een willekeurig punt op een ellips getrokken worden naar elk van beide navelpunten, zijn tezamen even lang als de transversale as.
Zoals nu hierboven voor de hyperbool is aangetoond dat het verschil van de getrokken CA en CB gelijk is aan de transversale as FG, zo zal hier aangetoond worden dat hun som gelijk is aan die transversale as, al wordt het bewijs dan niet geleverd door middel van optelling en samenvoeging,
[302] zoals daar gedaan is, maar door aftrekking en scheiding [3.43]. Dit bewijs kan echter met een enkele wijziging [3.44] ook op de volgende manier, en op elegantere wijze, geleverd worden [3.45].

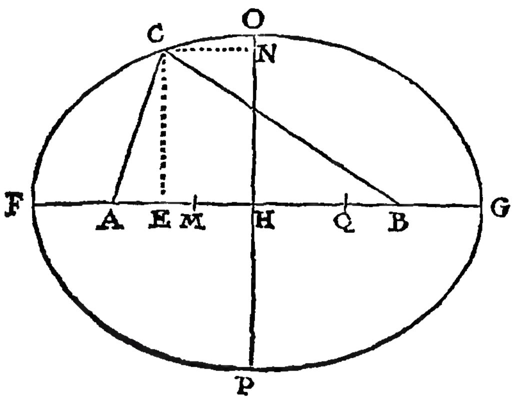
Laat FCG een willekeurige ellips zijn, met middelpunt H, grote as FG, kleine as OP [3.46] en navelpunten A en B, zodat de rechthoek FBG evenals ook GAF gelijk is aan het vierkant op de halve tweede middellijn HO [3.47].
Wanneer men vanuit een willekeurig punt C op de kromme de lijnstukken CA en CB trekt, dan moet men daarna CE en CN geordend aanbrengen op elk van de beide assen en ervoor zorgen dat HE staat tot HM zoals HF staat tot HA, zodat[1] de rechthoek AHE gelijk is aan de rechthoek FHM; vervolgens neemt men HQ gelijk aan HE.
Aangezien geldt[2] dat HE^2 staat tot HM^2 zoals HF^2 staat tot HA^2, zal ook door omzetting van verhoudingen [3.30], HE^2 staan tot EMQ zoals HF^2 staat tot GAF oftewel[3] tot HO^2, dat wil zeggen [4] zoals CN^2 oftewel HE^2 staat tot ONP en dus[5] zullen de rechthoeken ONP en EMQ gelijk zijn.
Aangezien[6] HM^2 tezamen met EMQ, dat wil zeggen tezamen met de rechthoek ONP, gelijk is aan HE^2 en omdat[7] ook HF^2 gelijk is aan de som van de vierkanten op HA en HO[8] (waarvan laatstgenoemde gelijk aan het vierkant op CE tezamen met de rechthoek ONP[9]), daarom zal $HM^2 + ONP + HF^2$ gelijk zijn aan $HE^2 + HA^2 + CE^2 + ONP$.
Indien men aan beide kanten de rechthoek ONP aftrekt, zullen dus de beide vierkanten op de lijnstukken HM en HF (of HG) overblijven, die tezamen gelijk zijn aan de drie vierkanten op de lijnstukken HE, HA, of HB, en CE.

---

[1]VI, 16; [2]VI, 22; [3]op grond van de veronderstelling; [4]prop. 13, Lib. I, blz. [205] en gevolg 1 daarvan, Lib. I, blz. [209]; [5]V, 9; [6]II, 5; [7]II, 5; [8]omdat het vierkant op HO gelijk is aan de rechthoek GAF op grond van de veronderstelling; [9]II, 5.

ut ibidem factum eſt, ſed per ſubductionem & diviſionem argumentatio inſtituatur. Quod ipſum tamen, adhibitâ nonnullâ mutatione, elegantiùs quoque in hunc modum abſolvi poſſe videtur.

Eſto quælibet Ellipſis F C G, cujus centrum H, axis major F G, minor O P, atque Vmbilici A & B; adeoque rectangulum F B G ut & G A F æquale quadrato ſemi-ſecundæ diametri H O.



Ductis ab aſſumpto quolibet curvæ puncto C rectis C A, C B, ordinatim ad utrumque axem applicentur C E, C N; & fiat ut H F ad H A, ita H E ad H M, adeò ut [1] A H E rectangulo æquale ſit rectangulum F H M; ſumaturque H Q æqualis ipſi H E. Hinc cum ſit [2] ut H F q ad H A q, ita H E q ad H M q, erit quoque per converſionem rationis ut H F q ad G A F ſeu [3] H O q, id eſt [4], ut C N q ſive H E q ad O N P, ita idem H E q ad E M Q; ac proinde [5] æqualia ſunt rectangula O N P & E M Q. Quocirca cum [6] H M q unà cum E M Q, id eſt, cum O N P rectangulo, æquale ſit H E q; ſitque & H F q [7] æquale quadratis rectarum H A & (H O [8] ſeu [9]) C E unà cum rectangulo O N P: erunt H M q + O N P + H F q æqualia H E q + H A q + C E q + O N P. Ac proinde ſi utrinque auferatur O N P rectangulum, remanebunt bina quadrata rectarum H M & H F ſeu H G ſimul æqualia tribus quadratis rectarum H E, H A ſeu H B, & C E. Hinc

[1] *per 16 ſexti.*
[2] *per 22 ſexti.*
[3] *ex hypotheſi.*
[4] *per 13 primi hujus ejuſque Corol. 1*
[5] *per 9 quinti.*
[6] *per 5 ſecundi.*
[7] *per 5 ſecundi.*
[8] quippe quadr. ex H O æquale eſt G A F rectang. ex hypoth. [9] *per 5 ſecundi.*

[303] Wanneer men elk van beide leden van deze vergelijking met dezelfde grootheden vermeerdert of vermindert, namelijk de ene kant met tweemaal *FHM* of *GHM* en de andere kant met tweemaal *AHE* of *BHE* , dan zal[1] FM^2 gelijk zijn aan $AE^2 + CE^2$, dus[2] aan AC^2 en evenzo[3] zal GM^2 gelijk zijn aan $BE^2 + CE^2$, dus[4] aan BC^2. Aangezien daarom het lijnstuk *FM* gelijk is aan *AC*, en *GM* gelijk is aan *BC*, zal de som van *AC* en *BC* gelijk zijn aan de transversale as *FG*. Hetgeen te bewijzen was.

Gevolg 2

Wanneer men vanuit een willekeurig punt op een ellips naar elk van beide navelpunten rechten trekt en door ditzelfde punt een andere lijn getrokken wordt die gelijke hoeken maakt met elk van beide getrokken lijnen, dan zal, beweer ik, deze de kromme in het genoemde punt raken en omgekeerd.

Indien immers de rechte *ICK*, die zo getrokken is dat de hoeken *ACI* en *BCK* gelijk zijn, de ellips niet raakt in het punt *C*, dan zal deze de ellips snijden, indien dat mogelijk is, in *C* en *K* (figuur op blz. [304], vert.).
Wanneer men dan *AC* verlengd heeft tot *L*, zodat *AL* in zijn geheel gelijk is aan de as *FG* en dus[5] het verlengstuk *CL* gelijk is aan *CB*, dan moet men vervolgens de verbindingslijnen *AK*, *BK* en *LK* trekken. Aangezien nu in de driehoeken *LCK* en *BCK* de zijden *LC* en *CK* respectievelijk gelijk zijn aan de zijden *BC* en *CK* en om gelijke hoeken liggen [3.48], zal ook de basis *LK* gelijk zijn aan de basis *BK*.
Maar omdat het punt *K* volgens onderstelling op de ellips ligt, zullen

---

[1]II, 7; [2]I, 47; [3]II, 4; [4]I, 47; [5]gevolg van prop. 1, Lib. II bladz. [301].

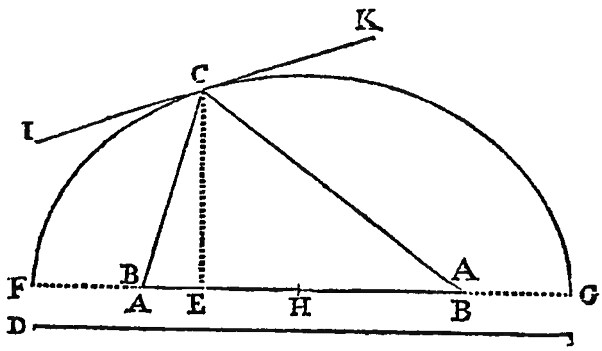
Hinc additis ablatisvè ab utraque æquationis parte æqualibus, nimirum F H M seu G H M bis ab una, & A H E seu B H E bis ab altera parte: erit [1] F M q æquale (A E q + C E q, id est [2],) A C q: [1] per 7 secundi.
itemque [3] G M q æquale (B E q + C E q, id est [4],) B C q. Cum- [2] per 47 primi.
que propterea recta F M æquetur ipsi A C, & G M ipsi B C: erit ipsarum A C & B C aggregatum transverso axi F G æquale. [3] per 4 secundi.
Quod demonstrandum erat. [4] per 47 primi.

Corollarium 2.

Ductis à quolibet Ellipseos puncto ad utrumque Vmbilicum rectis, si per idem illud punctum altera recta agatur, æquales cum utraque ducta angulos constituens, eadem curvam in dicto puncto contingit; & contra.

Si enim recta I C K ita ducta, ut æquales sint anguli A C I, B C K, non contingat Ellipsin in C puncto, secet eandem, si fieri potest, in C & K. Deinde productâ A C ad L, ita ut tota A L

Fig. 1.



axi F G, ideoque [5] adjecta C L ipsi C B æqualis sit, jungantur A K, B K, L K. Cum igitur, in triangulis L C K, B C K latera L C, C K lateribus B C, C K, utrumque utrique, circa æquales angulos, æqualia sint, erit quoque basis L K basi B K æqualis. At verò cum punctum K in Ellipsi supponatur, erunt, [5] per Corol. 1 hujus.

per

[304] volgens het voorgaande gevolg de lijnstukken AK en KB, dat wil zeggen de zijden AK en KL, tezamen gelijk zijn aan de transversale as FG en dus ook gelijk aan de basis AL, hetgeen ongerijmd is[1] . Dus snijdt de lijn ICK de ellips niet, maar raakt hij deze in het punt C. Aangezien geen andere lijn dan ICK[2] de ellips in C kan raken, is het omgekeerd ook duidelijk dat een lijn die de ellips in C raakt, de hoeken ACI en BCK aan elkaar gelijk maakt.

Hoofdstuk IV

ALGEMENE REGEL OM WILLEKEURIGE VLAKKE EN RUIMTELIJKE PLAATSEN TE VINDEN EN TE BEPALEN. [4.1]

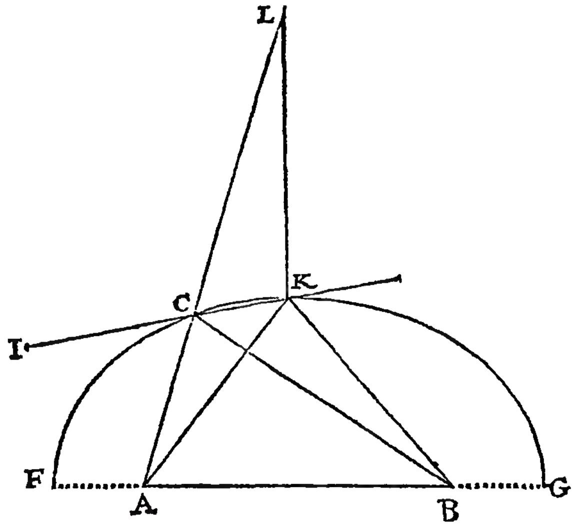
Nu, na al dit voorgaande, kunnen we besluiten tot de algemene Regel dat alle vergelijkingen die zich kunnen voordoen en op onze weg kunnen komen bij het onderzoek van plaatsen op de genoemde wijze, één van de volgende gedaanten hebben of tot een daarvan herleid kunnen worden met de reeds uiteengezette methode, wanneer tenminste daarin geen van de onbekende grootheden met zichzelf vermenigvuldigd, en ook geen onderling product daarvan, tot een derde macht leidt,

---

[1]I, 20; [2]prop. 17, Lib. I, blz. [223].

per Corollarium præcedens, rectæ A K, K B, hoc eſt, latera A K, K L ſimul ſumpta tranſverſo axi F G, ideoque & baſi A L

Fig 11.



æqualia, quod eſt abſurdum [1]. Non igitur ſecat recta I C K Ellipſin, ſed eandem contingit in C puncto. Cumque non poſſit in eodem puncto C alia recta Ellipſin contingere quàm I C K [2], manifeſtum eſt, è contra quoque eam, quæ Ellipſin in C contingit, efficere angulos A C I, B C K æquales.

[1] *per 20 primi.*
[2] *per 17 primi huius.*

CAPVT IV.

Regula univerſalis inveniendi ac determinandi loca quælibet plana & ſolida.

Iam verò his omnibus ita præmiſſis, pro generali Regula concludi poteſt, æquationes omnes, quæ in indagatione Locorum prædicto modo obvenire atque obtingere poſſunt, ita ut in iis neutra quantitatum incognitarum in ſe ducta, neque factum ſub iiſdem ad ſolidum

[305] maar indien vermenigvuldiging een kwadraat of een product van twee verschillende factoren niet te boven gaat.
En wel:

1. $y = \frac{bx}{a}$, of, wat hetzelfde geval is, $y = x$,

aangezien we kunnen onderstellen dat $a = b$.

$$y = \frac{bx}{a} \pm c, \text{ of } y = c - \frac{bx}{a}. \qquad [4.2]$$

Maar hier moet worden opgemerkt dat het ook mogelijk is dat door de bewerking een van de onbekende grootheden verdwijnt en de andere alleen overblijft en gelijk is aan een bekende grootheid, zoals hierboven [4.3] is uiteengezet.

2. $y^2 = dx$, of omgekeerd $dy = f^2$.
$y^2 = dx \bullet f^2$, of omgekeerd $dy \bullet f^2 = x^2$.
$z^2 = dx$, of omgekeerd $dy = v^2$.
$z^2 = dx \bullet f^2$, of omgekeerd $dy \bullet f^2 = v^2$. [4.4]

3. $y^2 = \frac{lx^2}{g} \bullet f^2$ $\qquad yx = f^2$.
$z^2 = \frac{lx^2}{g} \bullet f^2$ $\qquad zx = f^2$.

of ook

$y^2 = \frac{lv^2}{g} \bullet f^2$ $\qquad yv = f^2$.
$z^2 = \frac{lv^2}{g} \bullet f^2$ $\qquad zv = f^2$.

Hierbij wordt verondersteld dat overal y en x de onbepaalde grootheden zijn, waarvan men in eerste aanleg is uitgegaan, maar dat z een (via substitutie, vert.) aangenomen grootheid is, die samengesteld is uit y plus of min een zekere andere grootheid, die ofwel geheel bekend is, ofwel ook gecombineerd is met de andere oorspronkelijke onbekende grootheid, namelijk x; v is weliswaar ook aangenomen, maar bestaat in dit geval alleen uit x plus of min een andere bekende grootheid, beslist niet in combinatie met de onbekende grootheid y, òfwel v is daarentegen gelijk aan x plus of min een zekere andere grootheid lidum excurrat, ſed aut quadratum, aut planum non excedat, ex aliqua ſequentium formularum conſtare, vel ad earundem aliquam Methodo jam explicatâ reduci poſſe: nimirum,

1mò. $y \propto \frac{bx}{a}$, ſive, quod idem eſt, $y \propto x$: cum ſupponi poſſit eſſe $a \propto b$.
$y \propto \frac{bx}{a}$ 8 c, vel $y \propto c - \frac{bx}{a}$.

Signum 8 ſignificat + vel −

Sed hîc notandum, fieri etiam poſſe, ut per operationem quantitatum incognitarum altera evaneſcat, alteraque ſola notæ alicui quantitati æqualis remaneat, ſicut ſuperiùs expoſitum eſt.

2dò. $yy \propto dx$, aut converſim $dy \propto xx$.
$yy \propto dx.ff$, aut converſim $dy.ff \propto xx$.
$zz \propto dx$, aut converſim $dy \propto vv$.
$zz \propto dx.ff$, aut converſim $dy.ff \propto vv$.

3tiò. $yy \propto \frac{lxx}{g}.ff$	ſive etiam	$yx \propto ff$
$zz \propto \frac{lxx}{g}.ff$		$zx \propto ff$
$yy \propto \frac{lvv}{g}.ff$		$yv \propto ff$
$zz \propto \frac{lvv}{g}.ff$		$zv \propto ff$

Supponendo ubique y & x eſſe quantitates indeterminatas ac primò conceptas; at verò z eſſe quantitatem aſſumptam, & quæ compoſita ſit ex y 8 aliâ quâdam quantitate, vel in totum cognitâ, vel cui etiam altera incognita primùm concepta, nimirum x, permixta ſit; atque v quidem aſſumptam quoque eſſe, ſed eo caſu conſtare ſolummodo ex x 8 aliâ quantitate cognitâ, abſque ulla ipſius y incognitæ quantitatis permixtione: aut contra v eſſe $\propto x$ 8 aliâ quâdam quantitate,

[306] die ook met de onbekende y gecombineerd kan zijn en wel in het geval dat z uit y plus of min een andere, geheel bekende grootheid bestaat [4.5].
Indien de vergelijking een van de gedaanten van de formules sub 1 heeft dan zal de plaats een rechte lijn zijn; indien een van de gedaanten sub 2, een parabool, en indien een van de gedaanten sub 3, al naar het onderscheid in tekens en hoeken, een hyperbool of ellips of cirkel[4.6].

Om nu de genoemde plaatsen in detail te bepalen of de genoemde krommen in het platte vlak op meetkundige wijze te beschrijven, dient men te weten dat een zeker punt verondersteld moet worden, evenals een zekere rechte, welk punt dient als het beginpunt van een van beide onbekende grootheden die vanaf het begin worden aangenomen en langs welke rechte volgens onderstelling deze grootheid zich onbeperkt uitstrekt; evenzo moet een zekere hoek verondersteld worden, die genoemde onbekende grootheden met elkaar maken in het punt waarin zij elkaar volgens onderstelling ontmoeten [4.7].
Laat dan in bijgevoegde figuur (blz. [307], vert.) – evenals in alle volgende – het genoemde punt A zijn en de genoemde lijn AB; vanuit dit punt strekt de grootheid x zich volgens onderstelling onbeperkt uit langs deze lijn. Laat ook ABE de hoek zijn die ingesloten wordt door de grootheden y en x, die in het punt B met elkaar verbonden zijn.
In het eerste geval dan, wanneer de gezochte plaats een rechte is, namelijk wanneer als vergelijking optreedt $y = x$ of $y = \frac{bx}{a}$, zal het punt A het begin zijn van de genoemde lijn en om deze in detail te beschrijven moet men op AB een willekeurig punt nemen, bijvoorbeeld B, en daardoor een rechte trekken, zeg HBE, zo dat de hoek ABE gelijk is aan de vooronderstelde of aangenomen hoek. Indien men dan op deze rechte een punt, zeg D, neemt zo dat AB en BD gelijk zijn of zo dat AB staat tot BD zoals a staat tot b, en indien men vanuit A door het punt D de rechte AD trekt, dan zal deze AD, onbeperkt verlengd, de gezochte plaats zijn. Maar indien in de vergelijking ook een term c optreedt en deze voorzien is van het plusteken, dan moet men vanuit het punt A aan dezelfde kant van de lijn AB als die waar het punt E ligt, of, indien c van het minteken is voorzien, aan de andere kant, het lijnstuk AF trekken, evenwijdig aan HBE en gelijk aan de bekende c. Wanneer men dan FE of FG trekt, welke laatste de rechte AB snijdt in O, en (beide, vert.) evenwijdig aan AD, dan zal FE of OG, onbegrensd verlengd, de gezochte plaats zijn [4.8].

titate, cui & y incognita permixta esse possit atque eo quidem casu z ex y 8 aliâ quantitate in totum cognitâ constare.

Et si æquatio similis sit alicui formularum sub N° 1. comprehensarum, erit Locus quæsitus Linea Recta; sub N° 2. Parabola; & sub N° 3. secundùm signorum angulorumque varietatem vel Hyperbola, vel Ellipsis, vel Circulus.

Vt autem prædicta Loca specificè determinentur sive prædictæ Lineæ in plano Geometricè describantur, sciendum est, aliquod debere præsupponi punctum, ut & aliquam lineam à quo exordium sumat, & per quam indefinitè se extendere intelligatur altera incognitarum quantitatum primò conceptarum; itemque angulum quendam esse præsupponendum, quem dictæ quantitates incognitæ constituant in puncto, in quo sibi invicem junctæ intelliguntur.

Sit itaque in apposita figura, ut & in sequentibus omnibus, prædictum punctum A, dictaque linea A B, à quo, & per quam quantitas x se indefinitè extendere concipiatur; atque angulus A B E, quem faciunt quantitates y & x, in puncto B sibi invicem junctæ.

Et primo quidem casu, cùm Locus quæsitus est Linea recta, nimirum, æquatione existente $y \propto x$ vel $y \propto \frac{bx}{a}$, ipsum A punctum erit initium dictæ lineæ, atque ut eadem specificè describatur sumendum est in linea A B punctum utcunque, exempli gratiâ, B, ac per illud ductâ rectâ, velut H B E, ita ut angulus A B E præsupposito vel concepto angulo sit æqualis, si in eadem recta sumatur punctum, veluti D; ita ut A B & B D sint æquales, vel ut A B sit ad B D, sicut a ad b, atque ex A per punctum D ducatur recta A D: erit eadem A D indefinitè extensa Locus quæsitus. At si in æquatione inveniatur quoque terminus c, ac ipse quidem signo + affectus sit, ducenda est è puncto A ad eandem partem lineæ A B quàm est punctum E, aut si signo — adficiatur ab altera parte, recta A F ipsi H B E parallela atque æqualis c cognitæ; ductâque F E vel F G, quæ rectam A B secet in O, ipsi A D parallelâ: erit F E vel O G indefinitè producta Locus quæsitus.

Sed

[307] Indien echter de vergelijking luidt $y = c - \frac{bx}{a}$, dan moet men op de genoemde lijn HBE een punt *H* [4. 9] nemen aan de andere kant van de lijn *AB* dan die waar de gegeven of aangenomen hoek *ABE* ligt en wel zó dat *AB* staat tot *BH* zoals *a* staat tot *b*; daarna moet men eerst *AH* trekken en vervolgens vanuit het eerder genoemde punt *F*, aan de andere kant van de lijn *AB* dan die waar het punt *H* gekozen is, de lijn *FI* trekken, evenwijdig aan *AH*: dan zal deze *FI*, verlengd tot hij de lijn *AB* snijdt [4.10], de gezochte plaats zijn [4.11].

Immers wanneer zowel *AB* als *BD* gelijk is aan *x*, of wanneer zowel *AB* staat tot *BD* aan de ene zijde (van *AB*, vert.) alsook *AB* staat tot *BH* aan de andere zijde, zoals *a* staat tot *b* en dus *BD* of *BH* gelijk is aan $\frac{bx}{a}$ en evenzo in het geval dat *AF* oftewel *DE* of *DG* alsmede *HI*, gelijk zijn aan de bekende *c*, dan zal gelden

$$BE = BD + DE = \frac{bx}{a} + c$$

en

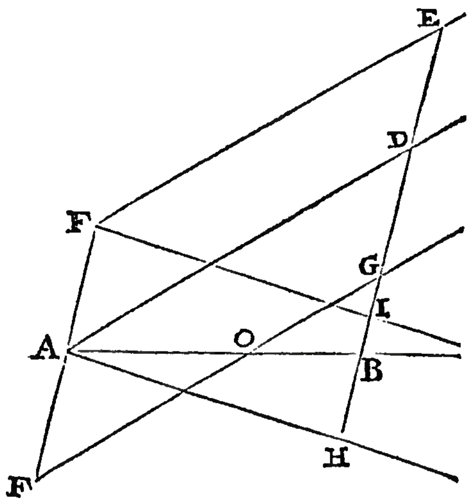
$$BG = BD - DG = \frac{bx}{a} - c$$

en

$$BI = HI - HB = c - \frac{bx}{a}.$$

Omdat het punt *B* willekeurig is aangenomen, zal dus hetzelfde bewijs gelden voor alle andere punten die op de rechte *AB* of op de genoemde plaatsen zijn aangenomen en zo is het duidelijk dat de genoemde rechten *AD*, *FE*, *FG* en *FI* de gezochte plaatsen zijn. Hetgeen te bepalen en te bewijzen was.

Sed si æquatio sit $y \infty c - \frac{bx}{a}$, in dicta linea H B E sumendum est ab altera parte lineæ A B, quâ datus vel assumptus angulus A B E existit, punctum H, ita ut A B ad B H sit, sicut a ad b; ductâque A H, ex prædicto puncto F ab opposita parte lineæ A B, quâ sum-



ptum est punctum H, ducenda est F I ipsi A H parallela: eritque eadem F I producta donec cum linea A B coïncidat Locus quæsitus.

Etenim, cum tam A B quàm B D sit ∞x, aut A B ad B D ab una, ut & A B ad B H ab altera parte, sit ut a ad b; ac proinde B D vel B H $\infty \frac{bx}{a}$: itemque, cum A F seu D E vel D G ut & H I sint æquales c cognitæ: erit B E sive B D + D E $\infty \frac{bx}{a} + c$, & B G sive B D — D G $\infty \frac{bx}{a} - c$, ac B I sive H I — H B $\infty c - \frac{bx}{a}$. Vnde cum punctum B sumptum sit utcunque, eadem erit de omnibus aliis, in linea A B, prædictisvè locis, assumptis punctis demonstratio: atque ita patet prædictas lineas A D, F E, F G, & F I esse Loca quæsita. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

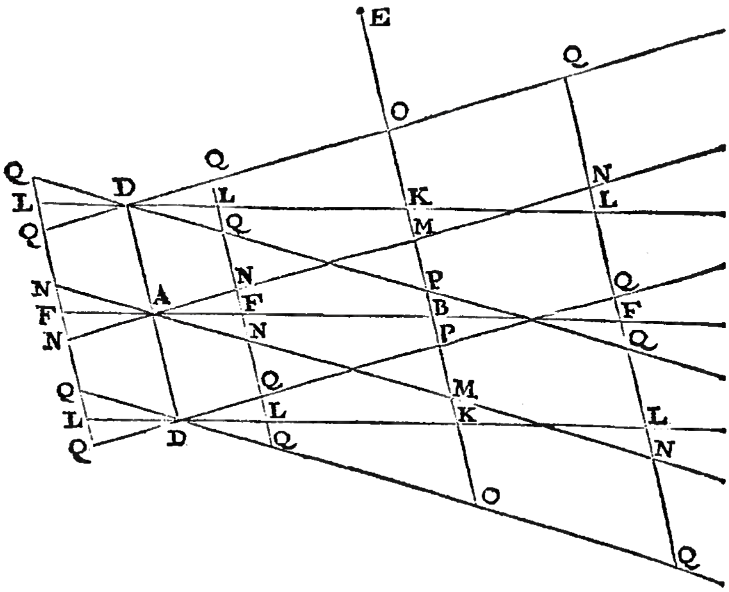
[308] Indien echter volgens de formules die sub 2 zijn aangereikt de gezochte plaats een parabool is, dan onderscheiden we de volgende gevallen [4.12], [4.13]:

I. In het eerste geval, wanneer de vergelijking luidt $y^2 = dx$, zal *AB* zelf middellijn van de parabool zijn, waarmee de daarop geordend aangebrachte rechten hoeken maken die gelijk zijn aan de gegeven of aangenomen hoek *ABE* en de top daarvan zal het punt *A* zijn [4.14].

II. In het tweede geval, waarin de vergelijking gesteld is op $y^2 = dx \bullet f^2$, blijft de middellijn op de lijn *AB* en wanneer men, zoals in de volgende figuur, *AF* gelijk neemt aan $\frac{f^2}{d}$, dan zal de top ervan in het punt *F* liggen. Dit punt *F* echter moet aan de andere kant van het punt *A* gekozen worden dan waar het punt *B* ligt, indien elk van beide termen, zowel dx als f^2, van het plusteken voorzien is;
maar indien ofwel de term dx, ofwel de term f^2 voorzien is van het minteken, dan moet het (nl. het punt *F*, vert.) genomen worden aan dezelfde kant van het punt *A* als waar het punt *B* ligt: en wel moet, indien de term dx van het plusteken is voorzien, de parabool beschreven worden vanaf *A* in de richting van *B*, maar indien daarentegen dx voorzien is van het minteken, dan moet de parabool beschreven worden in de tegengestelde richting, namelijk vanaf *F* in de richting van *A* [4.15].

At verò si juxta formulas sub N°. 2 exhibitas Locus quæsitus sit linea Parabolica, erit

I. Primo casu, quando æquatio est $yy \propto dx$, ipsa AB Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel assumpto angulo ABE æquales, atque ejusdem vertex A punctum.



II. Secundo casu positâ æquatione $yy \propto dx.ff$, manente diametro in eadem linea AB, sumptâque, ut in sequenti figura, $AF \propto \frac{ff}{d}$, erit ejusdem vertex in puncto F. Quod quidem punctum F, si uterque terminus tam dx quàm ff signo + sit affectus, ab altera parte puncti A, quâ est punctum B, sumendum est; sed si vel terminus dx, vel terminus ff signo — affectus sit, ab eadem parte puncti A, quâ est punctum B, sumi debet: & quidem si terminus dx signo + affectus sit, ab A versùs B Parabola describenda est; sin contra terminus dx signo — affectus fuerit, in contrariam partem, ab F nempe versùs A, describi debet.

At

[309] Indien echter de vergelijking luidt $z^2 = dx$ of $z^2 = dx \bullet f^2$ [4.16], waarbij z niet een grootheid is waarvan men in eerste instantie is uitgegaan, maar één die aangenomen is, dan zal deze aangenomen zijn in plaats van $y \pm c$, of in plaats van

$y \pm \frac{bx}{a}$, of tenslotte in plaats van $y \pm \frac{bx}{a} \pm c$.

III. Indien nu z gesteld is in plaats *van* $y \pm c$, hetgeen het derde geval is, dan moet men door het punt A het lijnstuk AD trekken, evenwijdig aan BE en gelijk aan c, zodanig dat, indien z aangenomen is in plaats van $y - c$, het punt D aan dezelfde kant van de lijn AB valt als die waar de hoek ABE is geconstrueerd. Indien echter z aangenomen is in plaats van $y + c$, dan moet het punt D daarentegen aan de andere kant van de lijn AB vallen.
Wanneer men vervolgens DK trekt evenwijdig aan AB, dan zal de middellijn van de parabool liggen op deze DK en D is de top, indien de vergelijking luidt $z^2 = dx$.

IV. Maar indien geldt $z^2 = dx \bullet f^2$, hetgeen het vierde geval is, dan moet men eerst nemen $DL = \frac{f^2}{d}$ en dan zal de top het punt L zijn. Dit zal echter ofwel aan deze ofwel aan de andere kant van het punt D vallen, naargelang de termen dx en f^2 voorzien zijn van het plus- of minteken, zoals hierboven over het punt F gezegd is. Zo moet ook de parabool of naar de ene kant of naar de andere kant beschreven worden, naargelang de term dx voorzien is van het plus- of minteken, zoals hierboven is opgemerkt. In alle genoemde gevallen en in elk geval afzonderlijk zal de parameter gelijk zijn aan d.

V. Maar indien z aangenomen is in plaats van $y \pm \frac{bx}{a}$, hetgeen het vijfde geval is, dan moet men eerst op de lijn BE het punt M aannemen zó dat AB staat tot BM zoals a staat tot b. Dit punt M moet echter gekozen worden aan dezelfde kant van de lijn AB waar de hoek ABE geconstrueerd is, indien men heeft $-\frac{bx}{a}$, maar aan de andere kant indien men heeft $+\frac{bx}{a}$. Vervolgens moet door de punten A en M de rechte AM getrokken worden; in dit geval zal AM middellijn zijn van de parabool, waarmee de daarop geordend aangebrachte rechten hoeken maken die gelijk zijn aan AME. Indien in de vergelijking de term f^2 ontbreekt of nul is, dan zal de top liggen in het punt A.

VI. Indien f^2 niet ontbreekt, hetgeen het zesde geval is, dan moet men eerst door de punten F en L de rechten LFL trekken [4.17], die de bovengenoemde middellijnen AM of de daaraan toegevoegde [4.18] in de punten N snijden; de top zal dan liggen in N, ofwel links ofwel rechts van het punt A, naargelang de termen dx en f^2 in de

At si æquatio sit $zz \infty dx$, vel $zz \infty dxff$, cum z non sit quantitas primò concepta sed assumpta, vel assumpta erit pro $y \; 8 \; c$, vel pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a}$, vel denique pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a} \; 8 \; c$.

III. Et si quidem z assumpta sit pro $y \; 8 \; c$, qui sit casus tertius, ducenda est per punctum A recta AD ipsi BE parallela atque ∞c; ita ut, si z assumpta sit pro $y - c$, punctum D cadat ad eandem partem lineæ AB, quam conceptus est angulus ABE: Et, si z sit assumpta pro $y + c$, punctum D è contra ad alteram partem lineæ AB cadat. Deinde ductâ DK ipsi AB parallelâ, erit in eadem DK Parabolæ diameter, & D vertex, si æquatio sit $zz \infty dx$.

IV. Sed si sit $zz \infty dx.ff$, qui sit quartus casus, sumptâ DL ∞ $\frac{ff}{d}$, erit vertex punctum L; quod quidem pro terminorum dx & ff per $+$ vel $-$ affectione eodem modo, ut supra de puncto F dictum est, vel citra vel ultra D punctum cadet; uti & vel in hanc vel in illam partem, prout terminus dx signo $+$ vel $-$ adfectus fuerit, ipsa Parabola, ut supra notatum est, describi debet: eritque omnibus & singulis prædictis quatuor casibus Parameter ∞d.

V. Si verò z assumpta sit pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a}$, qui casus sit quintus, sumpto in linea BE puncto M, ita ut sit AB ad BM, sicut a ad b, (quod quidem punctum M sumendum est ab eadem parte lineæ AB, quâ conceptus est angulus ABE, si habeatur $-\frac{bx}{a}$, sed ab altera parte, si habeatur $+\frac{bx}{a}$) ducenda est per puncta A & M recta AM: eritque AM eo casu Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos angulo AME æquales, & si in æquatione terminus ff deficiat aut nullus sit, erit vertex in puncto A.

VI. Sin minus, qui sit casus sextus, ductis per puncta F & L rectis LFL, quæ intersecent supra dictas diametros AM vel iis in directum adjunctas in punctis N: erit vertex in N, vel citra, vel ultra A punctum cadens, prout termini dx & ff in æquatione vel signo $+$ vel signo $-$ affecti fuerint; uti & vel in hanc vel in illam partem ipsa Parabola pro varia termini dx affectione, ut supra notatum est, describenda erit.

[309, vervolg]
vergelijking voorzien zijn van het plusteken of het minteken. Zo moet ook de parabool ofwel naar de ene kant ofwel naar de andere kant beschreven worden, overeenkomstig het verschil in teken van de term dx, zoals hierboven is opgemerkt.

[310] Indien tenslotte z aangenomen is in plaats van $y \pm \frac{bx}{a} \pm c$, dan moet men eerst, zoals zojuist is uiteengezet, AD trekken ter lengte van c. Het punt D moet, zoals hierboven, ofwel aan de ene kant van de lijn AB gekozen worden, ofwel aan de andere kant, naargelang de grootheid c voorzien is van het plus – of het minteken.

VII. Vanuit het punt D moet men de rechte DO trekken evenwijdig aan dié AM die aan dezelfde kant ligt (van AB als D, vert.) indien de termen $\frac{bx}{a}$ en c van hetzelfde teken zijn voorzien, hetgeen het zevende geval is.

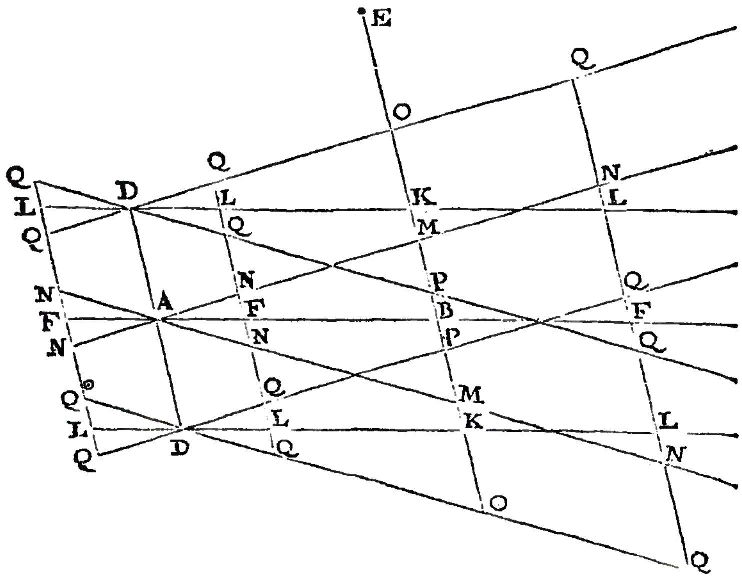
VIII. In het andere geval [4.19], hetgeen het achtste geval is, moet de rechte DP getrokken worden evenwijdig aan dié AM die aan de andere kant van de lijn AB ligt en deze DO of DP moet als middellijn genomen worden, waarmee de daarop geordend aangebrachte rechten hoeken maken die gelijk zijn aan de hoek DOE of DPE; het punt D zal de top zijn indien de term f^2 ontbreekt in de vergelijking.

IX. Zo niet [4.20], hetgeen het negende geval is, dan zal de top het gemeenschappelijke snijpunt zijn van de middellijnen DO of DP met de rechten LFL, namelijk het punt Q, dat wederom, naargelang de termen dx en f^2 voorzien zijn van het plus- of minteken, ofwel links ofwel rechts van het punt D valt zoals ook de parabool

Si denique z assumpta sit pro y ȣ $\frac{bx}{a}$ ȣ c, ductâ, ut modò expositum fuit, A D ∞ c, ex puncto D (quod pro quantitatis c per signum + vel — affectione, ut supra, vel ab hac, vel ab illa parte lineæ A B sumi debet) ducenda est recta D O ipsi

VII. A M, quæ est ad eandem partem, parallela, si termini $\frac{bx}{a}$ & c eodem signo sint affecti, qui casus sit septimus.

VIII. At si diverso, qui sit casus octavus, ducenda est recta D P parallela ipsi A M, quæ est ab adversa parte lineæ A B, atque eadem D O vel D P sumenda est pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos angulo D O E vel D P E æquales: eritque vertex punctum D, si terminus ff in æquatione deficiat.



IX. Sin minùs, qui sit casus nonus, erit idem vertex ipsarum D O vel D P diametrorum & linearum L F L communis intersectio, videlicet punctum Q, quodque iterum pro terminorum dx & ff per signum + vel — affectione vel citra vel ultra D punctum cadit; quemadmodum & ipsa Parabola vel versùs hanc

[311] zelf beschreven moet worden naar de ene kant of naar de andere kant, al naar het verschil in voorteken van de term dx, zoals hierboven opgemerkt is. In de laatste vijf gevallen die reeds uiteengezet zijn, zal de parameter zich verhouden tot de bekende d, zoals AB staat tot AM, dat wil zeggen d staat tot de parameter zoals AM staat tot AB [4.21].

Van dit alles is echter het bewijs zeer gemakkelijk [4.22]. Laten wij namelijk veronderstellen dat de parabolen beschreven zijn met de genoemde middellijnen en parameters, dat zij gaan door de aangegeven toppen en dat van de rechten die geordend zijn aangebracht op deze middellijnen er één willekeurig gekozen is langs de rechte OE; laten we ook veronderstellen dat deze parabolen de genoemde geordend aangebrachte rechte snijden in het punt E [4.23].

In het *eerste* geval, waarin het deel van de middellijn AB tussen de top A en een willekeurige geordend op deze middellijn aangebrachte rechte, zeg AB, als x wordt opgevat en deze geordend aangebrachte lijnstukken (BE, vert.) elk voor zich als y en waarbij de parameter d is en op grond van de aard van de parabool[1] de rechthoek, gevormd door de genoemde parameter en het lijnstuk AB, gelijk is aan het vierkant op BE, zal gelden $dx = y^2$. (1)

In het *tweede* geval, waarin de top ligt in het punt F, met onderscheiding van drie gevallen, waarop hierboven gewezen is [4.24], moet allereerst opgemerkt worden dat, in de gevallen waarin de vergelijking luidt $y^2 = dx \pm f^2$, het punt B op de lijn FB vanaf A in de richting van B onbeperkt gekozen kan worden; wij hebben hierboven immers opgemerkt dat in deze gevallen de parabool beschreven moet worden vanaf A in de richting van B.

Maar in het geval waarin de vergelijking luidt $y^2 = f^2 - dx$ en de parabool volgens de Regel in tegengestelde richting, vanaf F in de richting van A beschreven moet worden, mag het punt B alleen maar tussen F en A gekozen worden [4.25]. Dit blijkt ook uit de vergelijking zelf. Aangezien immers in de genoemde vergelijking geldt $y^2 = f^2 - dx$ of, wat hetzelfde is, $f^2 - y^2 = dx$, is de term f^2 groter dan dx, hij overtreft deze immers met de grootheid y^2, daarom is ook, indien men aan beide kanten deelt door d, $\dfrac{f^2}{d}$ groter dan x. Dus zal, omdat volgens de Regel $\dfrac{f^2}{d}$ gelijk is aan het lijnstuk AF, en x gelijk is aan het lijnstuk AB, evenzo het lijnstuk AF groter zijn dan AB. Daarom zal ook het punt B, zoals gezegd is, tussen de punten A en F vallen. Dit is ook van toepassing op de volgende gevallen.

Verder geldt het volgende [4.26]: omdat $AF = \dfrac{f^2}{d}$, zal ook FB (dus, met de onderscheiding in drie gevallen zoals hierboven gezegd is, $AB + AF$, $AB - AF$ en

---

[1] prop. 1, Lib. I, blz. [162].

hanc vel versùs illam partem pro diverſa termini dx affectione, ut ſupra eſt notatum, deſcribenda eſt: Ac poſtremis quidem iſtis quinque caſibus jam explicatis Parameter erit ad d cognitam, ſicut A B ad A M, hoc eſt, erit ut A M ad A B, ita d ad Parametrum.

Quorum quidem omnium demonſtratio perfacilis eſt. Intelligantur enim Parabolæ prædictis diametris ac parametris deſcriptæ, quæ per annotatos vertices tranſeant, ſitque ordinatim ad eaſdem diametros applicatarum aliqua in recta O E utcunque ſumpta, & ſupponatur eaſdem Parabolas prædictam applicatam ſecare in E puncto: & primo caſu, cum pars diametri A B inter verticem A & quamlibet ad eandem diametrum applicatam intercepta, veluti A B, concipiatur, ut x, ac ſingulæ illæ applicatæ, ut y; ſitque Parameter ∞ d, atque ex natura Parabolæ [1] rectangulum ſub dicta Parametro & re- [1] per 1 primi hujus.
1. cta A B contentum ſit ∞ B E quadrato: erit $dx \infty yy$.

Secundo caſu, ubi vertex eſt in puncto F cum triplici diſtinctione, ut ſupra monitum eſt, notandum primò venit, in caſibus, ubi æquatio eſt $yy \infty dx \pm ff$, punctum B in linea F B ab A versùs B indefinitè ſumi poſſe: cum iſtis caſibus ab A versùs B Parabolam deſcribendam eſſe ſupra annotatum ſit; At verò caſu, ubi æquatio eſt $yy \infty ff - dx$, cum juxta Regulam Parabola in contrariam partem ab F versùs A ſit deſcribenda, punctum B non niſi inter F & A aſſumendum eſſe. id quod etiam ex ipſa æquatione manifeſtum eſt. Quoniam enim in prædicta æquatione $yy \infty ff - dx$ ſive quod idem eſt $ff - yy \infty dx$, terminus ff major eſt quàm dx, utpote eundem excedens quantitate yy; idcirco quoque ſi utrinque diviſio fiat per d, $\frac{ff}{d}$ majus erit quàm x. Quare cum ſecundum Regulam $\frac{ff}{d}$ æquetur rectæ A F, & $x \infty$ rectæ A B, erit ſimiliter recta A F major quàm A B: ideoque B punctum inter A & F puncta, ſicut dictum eſt, cadet. id quod ad caſus quoque ſequentes applicatum eſto. Porrò quoniam A F eſt ∞ $\frac{ff}{d}$, erit F B (hoc eſt, obſervatâ triplici diſtinctione, ut prædictum eſt, A B $\pm$ A F, atque etiam A F — A B) æqualis $x \pm \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - x$; eâque multiplicatâ per parametrum d, fit rectangulum $dx \pm ff$;

atque

[311, vervolg]

ook $AF - AB$) gelijk zijn aan $x + \frac{f^2}{d}$, $x - \frac{f^2}{d}$ en ook aan $\frac{f^2}{d} - x$. Wanneer men dit vermenigvuldigt met de parameter d, dan wordt de rechthoek (gevormd door de parameter en AB, vert.) gelijk aan $dx \pm f^2$

[312] en ook gelijk aan $f^2 - dx$.

Dit is gelijk aan het vierkant op het aangebrachte lijnstuk BE, oftewel aan y^2, dus geldt

$$y^2 = dx \pm f^2 \text{ en } y^2 = f^2 - dx. \tag{2}$$

In het *derde* geval, waarin de top in het punt D ligt en de middellijn op de rechte DK, geldt, omdat AD of BK gelijk is aan c, dat KE (dit is $BE - BK$) $= y - c$ en KBE (dat is $BE + BK$) $= y + c$.
Omdat in dit geval z aangenomen is in plaats van $y \pm c$ zullen KE en KB gelijk zijn aan z. DK of AB zijn echter gelijk aan x, de parameter is d en de rechthoek, gevormd door de genoemde parameter en het lijnstuk DK, is gelijk aan het vierkant op KE of KBE. Aangezien dit vierkant gelijk is aan z^2 en die rechthoek gelijk is aan dx, zal dus gelden

$$z^2 = dx. \tag{3}$$

In het *vierde* geval, waarin de top ligt in het punt L, terwijl de middellijn op de rechte DK blijft, zal LK (dat wil zeggen met – volgens de regel – inachtneming van het onderscheid in drie gevallen: $DK \pm DL$ en ook $LD - DK$) gelijk zijn aan $x \pm \frac{f^2}{d}$ en ook aan $\frac{f^2}{d} - x$, omdat DL ofwel AF gelijk is aan $\frac{f^2}{d}$.
Vermenigvuldigd met de parameter d geeft dit de rechthoek $dx \pm f^2$ en ook $f^2 - dx$, die gelijk is aan het vierkant op de aangebrachte KE of KBE, oftewel z^2.
Dus zal ook gelden $z^2 = dx \pm f^2$ en ook $z^2 = f^2 - dx$. (4)

In het *vijfde* geval, waarin de top ligt in het punt A en de middellijn op de rechte AM, zal gelden $BM = \frac{bx}{a}$, omdat AB, dus x, staat tot BM zoals a staat tot b en dus geldt: ME (of $BE - BM$) $= y - \frac{bx}{a}$ en MBE (of $BE + BM$) $= y + \frac{bx}{a}$ [4.27]. Omdat in dit geval z is aangenomen in plaats van $y \pm \frac{bx}{a}$, zullen ME en MBE gelijk zijn aan z.
Omdat echter in de driehoek ABM zowel de hoek ABM bekend is alsook de verhouding van de zijden AB en BM die de genoemde hoek insluiten, is ook[1] de

[1] VI, 6.

atque etiam $ff - dx$. quod æquale eſt quadrato applicatæ BE
2. ſive yy, ac proinde $yy \infty dx \pm ff$, atque $yy \infty ff - dx$.

Tertio caſu, ubi vertex eſt in puncto D, ac diameter in recta DK, quoniam AD ſeu BK eſt ∞c: erit KE, hoc eſt, $BE - BK \infty y - c$; & KBE, hoc eſt, $BE + BK \infty y + c$. Cumque eo caſu z aſſumpta ſit pro $y \pm c$, erit KE & KBE ∞z. Eſt autem DK ſeu AB ∞x, parameterque ∞d, & rectangulum ſub dicta Parametro & recta DK contentum ∞ quadrato ex KE vel KBE. Quare cum hoc quadratum ſit ∞zz, atque
3. rectangulum illud ∞dx, erit $zz \infty dx$.

Quarto caſu, ubi manente diametro in recta DK vertex eſt in puncto L, quoniam DL ſive AF eſt $\infty \frac{ff}{d}$, erit LK (hoc eſt, obſervatâ triplici diſtinctione juxta Regulam, DK $\pm$ DL, atque etiam LD — DK) æqualis $x \pm \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - x$. quâ multiplicatâ per Parametrum d, fit rectangulum $dx \pm ff$, atque etiam $ff - dx$. quod æquale eſt quadrato applicatæ KE vel KBE, hoc eſt, zz: eritque proinde $zz \infty dx \pm ff$, atque
4. $zz \infty ff - dx$.

Quinto caſu, ubi vertex eſt in puncto A, diameterque in recta AM, cum ſit ut a ad b, ita AB, hoc eſt, x, ad BM: erit BM $\infty \frac{bx}{a}$, ideoque ME, hoc eſt, BE — BM $\infty y - \frac{bx}{a}$, & MBE, hoc eſt, BE + BM $\infty y + \frac{bx}{a}$. Et quoniam eo caſu z aſſumpta eſt pro $y \pm \frac{bx}{a}$, erit ME & MBE ∞z. At cum in triangulo ABM cognita ſint & angulus ABM, & ratio laterum AB, BM, dictum angulum comprehendentium, nota quoque eſt[a] ratio reliquorum dicti trianguli laterum ad invicem, atque in ſpecie etiam lateris AB ad AM, quæ ſit ut a ad e. Ac proinde cum ſit ut a ad e, ita AB, h.e., x ad AM: erit AM $\infty \frac{ex}{a}$. Cumque porrò juxta Regulam eo caſu ſit ut AM ad AB, hoc eſt, ut e ad a, ita d ad Parametrum: erit Parameter $\infty \frac{ad}{e}$. Quâ multiplicatâ per AM ſeu $\frac{ex}{a}$ fiet rectangulum ∞dx. Quod æquale eſt quadrato applicatæ ME vel MBE, hoc eſt, zz; ac proin-
5. de eſt $zz \infty dx$.

[a] per 6 ſexti.

Sexto

[312, vervolg]
onderlinge verhouding van de overige zijden van de genoemde driehoek bekend en in het bijzonder ook die van de zijde AB tot AM, die we stellen op a tot e.

Omdat AB, dat is x, staat tot AM, zoals a staat tot e, zal dus $AM = \frac{ex}{a}$. Aangezien verder volgens de Regel in dit geval AM staat tot AB, dat is e staat a, zoals d staat tot de parameter, zal de parameter gelijk zijn aan $\frac{ad}{e}$ [4.28].

Wanneer we dit vermenigvuldigen met AM oftewel $\frac{ex}{a}$, dan ontstaat de rechthoek die gelijk is aan dx. Deze is gelijk aan het vierkant op ME of MBE, d.i. z^2 en dus geldt $z^2 = dx$. (5)

[313] In het *zesde* geval, waarin de top ligt in het punt N [4.29] en de middellijn op de rechte NM, zal, omdat AF staat tot AN zoals AB staat tot AM, hetgeen betekent dat $\frac{f^2}{d}$ staat tot AN, zoals a staat tot e, gelden dat $AN = \frac{ef^2}{ad}$ en dat NM (dus met inachtneming van de onderscheiding, volgens de Regel, in drie gevallen: $AM \pm AN$ en ook $NA - AM$) gelijk is aan $\frac{ex}{a} \pm \frac{ef^2}{ad}$ en ook aan $\frac{ef^2}{ad} - \frac{ex}{a}$.

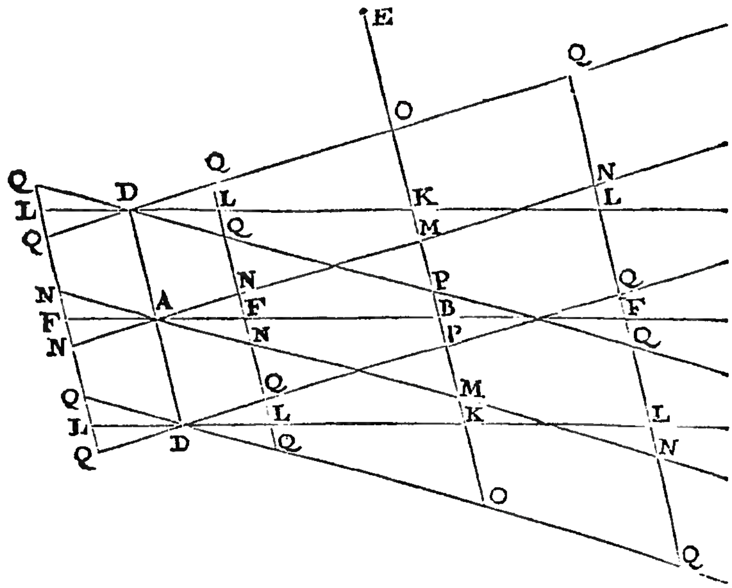
Wanneer we dit vermenigvuldigen met de parameter $\frac{ad}{e}$, dan ontstaat de rechthoek $dx \pm f^2$ en ook $f^2 - dx$.

Omdat deze gelijk is aan het vierkant op de aangebrachte ME of MBE [4.27], dus gelijk aan z^2, zal gelden

$$z^2 = dx \pm f^2 \text{ en } z^2 = f^2 - dx. \qquad (6)$$

In het *zevende* geval, waarin de top ligt in het punt D en de middellijn op de rechte DO, zal, omdat AD of MO gelijk is aan c, gelden dat OE (oftewel $BE - BM - MO$) gelijk is aan $y - \frac{bx}{a} - c$ en OBE [4.30] (oftewel $BE + BM + MO$) gelijk is aan $y + \frac{bx}{a} + c$. Omdat in dit geval z aangenomen is in plaats van $y - \frac{bx}{a} - c$ of in plaats van $y + \frac{bx}{a} + c$, zal gelden dat OE en OBE gelijk zijn aan z (de tekst vermeldt ten onrechte tweemaal d i.p.v. c, vert.).

Sexto casu, ubi vertex est in puncto N, & diameter in recta N M, quoniam est ut A B ad A M, ita A F ad A N, hoc est, ut a ad e, ita $\frac{ff}{d}$ ad A N: erit A N ∞ $\frac{eff}{ad}$, & N M (hoc est, observatâ juxta Regulam triplici distinctione, A M $\pm$ A N, atque etiam N A — A M) æqualis $\frac{ex}{a}$ $\pm$ $\frac{eff}{ad}$, atque etiam $\frac{eff}{ad}$ $-\frac{ex}{a}$. Quâ multiplicatâ per Parametrum $\frac{ad}{e}$, fit rectangu-



lum $dx \pm ff$, atque etiam $ff - dx$. Quod cum æquale sit quadrato applicatæ M E vel M B E, hoc est, zz: erit
6. $zz \infty dx \pm ff$, atque $zz \infty ff - dx$.

Septimo casu, ubi vertex est in puncto D, & diameter in recta D O, quoniam A D seu M O est ∞c, erit O E (sive B E — B M — M O) $\infty y - \frac{bx}{a} - c$, & O B E (sive B E + B M + M O) $\infty y + \frac{bx}{a} + c$. Cumque eo casu z assumpta sit pro $y - \frac{bx}{a} - d$, vel pro $y + \frac{bx}{a} + d$: erit O E & O B E ∞z. Porrò cum D O

 seu

[314] Aangezien *DO* of *AM* gelijk is aan $\frac{ex}{a}$, en de parameter van de kegelsnede gelijk is aan $\frac{ad}{e}$ zal verder de rechthoek, ingesloten door de parameter en het lijnstuk *DO*, gelijk zijn aan *dx*. Omdat deze rechthoek gelijk is aan het vierkant op de aangebrachte *OE* of *OBE* [4.30], dit is gelijk aan z^2, zal gelden $z^2 = dx$. (7)

In het *achtste* geval, waarin, met behoud van de top in het punt *D*, de middellijn ligt op de rechte *DP*, zal, omdat *AD* of *BK* gelijk is aan *c* en *KP* gelijk is aan $\frac{bx}{a}$, in het ene geval gelden *PE* (oftewel *BE* $-$ *BK* + *KP*) $= y - c + \frac{bx}{a}$ en in het andere geval PE (oftewel *BE* + *BK* $-$ *KP*) $= y + c - \frac{bx}{a}$. Omdat in dit geval *z* aangenomen is in plaats van y $+ \frac{bx}{a} -$ c of in plaats van $y - \frac{bx}{a} + c$, zal in beide gevallen gelden $PE = z$. Aangezien *DP* of *AM* gelijk is aan $\frac{ex}{a}$ en de parameter gelijk is aan $\frac{ad}{e}$, zal de rechthoek, ingesloten door de parameter en het lijnstuk *DP* gelijk zijn aan *dx*. Omdat deze zelfde rechthoek gelijk is aan het vierkant op elk van beide (geordend) aangebrachte lijnstukken *PE*, dit is gelijk aan z^2, zal ook gelden

$z^2 = dx$. (8)

In het *negende* geval, waarin de top ligt in het punt *Q* en de middellijn op de rechte *QO* of *QP* zal, omdat evenals hierboven, *OE* gelijk is aan $y - \frac{bx}{a} - c$ en $OBE = y + \frac{bx}{a} + c$, maar *PE* in het ene geval gelijk is aan $y - c + \frac{bx}{a}$ en *PE* in het andere geval gelijk aan $y + c - \frac{bx}{a}$ en omdat *z* in dit geval is aangenomen in plaats van $y \pm \frac{bx}{a} \pm c$, gelden dat *OE*, *OBE* en, in beide gevallen, *PE*, gelijk zijn aan *z*.

Aangezien *DO* of *DP* of *AM* gelijk is aan $\frac{ex}{a}$ en *DQ* of *AN* gelijk is aan $\frac{ef^2}{ad}$, zal *QO* of *QP* (dat wil zeggen met in achtneming van de verdeling in drieën volgens de Regel: $DO \pm DQ$, of $DP \pm DQ$ en ook $QD - DO$, of $QD - DP$) gelijk zijn aan $\frac{ex}{a} \pm \frac{ef^2}{ad}$ en ook gelijk aan $\frac{ef^2}{ad} - \frac{ex}{a}$.

seu A M sit $\infty \frac{ex}{a}$, Parameterque sectionis $\infty \frac{ad}{e}$, erit rectangulum sub Parametro & recta D O contentum $\infty\ dx$. Cumque idem illud rectangulum æquetur quadrato applicatæ O E vel
7. O B E, id est, zz: erit $zz \infty dx$.

Octavo casu, ubi, manente vertice in puncto D, diameter est in recta D P, quoniam A D seu B K est $\infty\ c$, & K P $\infty \frac{bx}{a}$, erit P E una (sive B E — B K + K P) $\infty\ y - c + \frac{bx}{a}$, & P E altera (sive B E + B K — K P) $\infty\ y + c - \frac{bx}{a}$. Cumque eo casu z assumpta sit pro $y + \frac{bx}{a} - c$ vel pro $y - \frac{bx}{a} + c$: erit utraque P E $\infty\ z$. Porrò cum D P seu A M sit $\infty \frac{ex}{a}$ ac Parameter $\infty \frac{ad}{e}$, erit rectangulum sub Parametro & recta D P contentum $\infty\ dx$. Cumque idem rectangulum æquale sit quadrato utriusque ap-
8. plicatæ P E, hoc est, zz: erit quoque $zz \infty dx$.

Nono casu, ubi vertex est in puncto Q, & diameter in recta Q O vel Q P, quoniam, ut supra, O E est $\infty\ y - \frac{bx}{a} - c$, atque O B E $\infty\ y + \frac{bx}{a} + c$; at verò P E una $\infty\ y - c + \frac{bx}{a}$, ac P E altera $\infty\ y + c - \frac{bx}{a}$, sitque eo casu z assumpta pro y 8 $\frac{bx}{a}$ 8 c: erit O E, O B E, atque utraque P E $\infty\ z$. Et cum D O aut D P seu A M sit $\infty \frac{ex}{a}$, atque D Q seu A N $\infty \frac{eff}{ad}$: erit Q O vel Q P (hoc est, observatâ juxta Regulam triplici distinctione, D O vel D P 8 D Q, atque etiam Q D — D O vel D P) æqualis $\frac{ex}{a}$ 8 $\frac{eff}{ad}$, atque etiam $\frac{eff}{ad} - \frac{ex}{a}$. Unde si eadem Q O vel Q P multiplicetur per Parametrum $\infty \frac{ad}{e}$, erit rectangulum $\infty\ dx$ 8 ff, atque etiam $ff - dx$. Quod quidem rectangulum cum æquale sit quadrato applicatæ O E, O B E, aut utriusque P E,
9. hoc est, zz: erit quoque $zz \infty dx$ 8 ff, atque $zz \infty ff - dx$. Quæ quidem omnia sunt, quæ hîc demonstranda erant.

Quod autem ad æquationes superioribus novem casibus conversim correspondentes spectat, ut lineæ Parabolicæ describantur, quæ sint Loca quæsita: positis iisdem, ut supra, per pun-

[314, vervolg]
Indien deze QO of QP vermenigvuldigd wordt met de parameter, die gelijk is aan $\frac{ad}{e}$, zal dus de rechthoek gelijk zijn aan $dx \pm f^2$ en ook aan $f^2 - dx$. Aangezien echter deze rechthoek gelijk is aan het vierkant op de geordend aangebrachte lijnstukken OE en OBE of op elk van beide lijnstukken PE, dat wil zeggen gelijk aan z^2, zal ook gelden

$$z^2 = dx \pm f^2 \text{ en } z^2 = f^2 - dx. \tag{9}$$

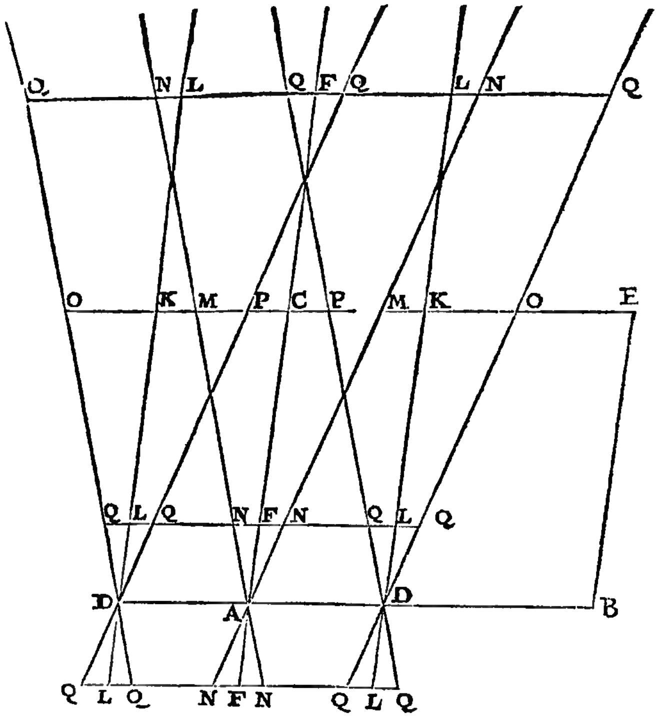
Dit is alles wat hier bewezen moest worden. Wat echter de vergelijkingen betreft, die corresponderen met het omgekeerde van bovengenoemde negen gevallen, zij het volgende opgemerkt: om de parabolen te beschrijven die de gezochte plaatsen zijn, moet men onder dezelfde veronderstellingen als hierboven

[315] door het punt A de rechte AC trekken, evenwijdig aan BE en vervolgens moet men AC overal opvatten zoals de rechte AB opgevat werd in de bovenstaande figuur. Verder moet men eerst op deze AC een willekeurig punt nemen, zeg C, en wanneer men dan door dit punt een rechte getrokken heeft evenwijdig aan AB, zeg OCE, dan moet men eveneens deze OCE overal opvatten zoals de rechte OBE opgevat werd in de vorige figuur, dat wil zeggen zonder een andere (sic!) wijziging aan te brengen.
Bijvoorbeeld:

I. Indien de vergelijking luidt $dy = x^2$, dan zal AC middellijn zijn, A de top en de parameter d. Aangezien immers AC of BE opgevat is als y en CE of AB als x en de rechthoek, ingesloten door de parameter en AC, dat wil zeggen dy, gelijk is aan het vierkant op het lijnstuk CE of AB, dat wil zeggen aan x^2, zal, zoals verlangd wordt, gelden $dy = x^2$.

II. Indien de vergelijking luidt $dy \bullet f^2 = x^2$, dan zal, als men stelt $AF = \frac{f^2}{d}$, F de top zijn, terwijl de middellijn blijft op de rechte FC en de parameter gelijk blijft aan d [4.31].

punctum A ducenda est recta A C ipsi B E parallela, ac deinde ipsa A C, ubique consideranda, ut considerata fuit recta A B in superiori figura. Porrò sumpto in eadem A C puncto utcunque, veluti C, atque per id ductâ rectâ ipsi A B parallelâ, velut O C E, erit similiter hæc O C E ubique consideranda, sicut considerata fuit recta O B E in præcedenti figura, nullâ scilicet aliâ mutatione adhibitâ. Exempli gratiâ: Si æ-
I. quatio sit $dy \infty xx$, erit A C diameter, A vertex, & Parame-



ter ∞d. Cum enim A C seu B E sit concepta ut y, & C E seu A B ut x, rectangulumque sub Parametro & A C contentum, hoc est, dy, æquetur quadrato rectæ C E seu A B, hoc est, xx: erit, ut petitur, $dy \infty xx$.

II. Si æquatio sit $dy.ff \infty xx$, sumptâ A F $\infty \frac{ff}{d}$, erit F vertex, manente diametro in recta F C, atque Parametro ∞d. Est

[316] Op grond van de onderscheiding in drie gevallen volgens de Regel, geldt immers $FC = y \pm \frac{f^2}{d}$ en ook $FC = \frac{f^2}{d} - y$. Dus is de rechthoek, ingesloten door de parameter en deze FC, gelijk aan $dy \pm f^2$ en ook gelijk aan $f^2 - dy$. Aangezien deze rechthoek echter gelijk is aan het vierkant op het aangebrachte lijnstuk CE, dus aan x^2, zal, zoals verlangd wordt, gelden $dy \bullet f^2 = x^2$.

III. Indien de vergelijking luidt $dy = v^2$ of $dy \bullet f^2 = v^2$ en v eerst is aangenomen in plaats van $x \pm c$, dan moet men AD gelijk maken aan c en het punt D kiezen vanaf A in de richting van B indien v aangenomen is in plaats van $x - c$, maar daarentegen naar de andere kant, indien v aangenomen is in plaats van $x + c$. Wanneer men dan DK evenwijdig aan AC trekt, dan zal de middellijn liggen op de rechte DK. Indien de term f^2 ontbreekt, zal de top liggen in D.

IV.In het andere geval in L, waarbij drie deelgevallen onderscheiden moeten worden, zoals hierboven uiteengezet is. Het is duidelijk dat DB of DAB, dat is KE of KCE, gelijk zullen zijn aan v, DK gelijk aan y, LK gelijk aan $y \pm \frac{f^2}{d}$ en ook LK gelijk aan $\frac{f^2}{d} - y$; dus is de rechthoek, ingesloten door de parameter d en genoemde DK gelijk aan dy, maar die, welke door d en LK wordt ingesloten, is gelijk aan $dy \pm f^2$ en ook gelijk aan $f^2 - dy$.

Daar deze rechthoek echter gelijk is, of verondersteld wordt gelijk te zijn, aan het vierkant op het aangebrachte lijnstuk KE of KCE, dus aan v^2, zal, zoals verlangd wordt, gelden $dy = v^2$ of $dy \bullet f^2 = v^2$.

V. Laat vervolgens v aangenomen zijn in plaats van $x \pm \frac{by}{a}$. Wanneer men dan op de rechte OCE een punt M aanneemt, vanuit C in de richting van E indien men te maken heeft met $-\frac{by}{a}$, maar naar de andere kant van de lijn AC, indien men te maken heeft met $+\frac{by}{a}$ en wel zo dat AC staat tot CM, zoals a staat b, dan zal de middellijn liggen op de rechte AM en de top daarop in het punt A indien de term f^2 ontbreekt.

VI. Maar zo niet, dan (ligt de top) in N.

Wanneer men de verhouding van AC tot AM stelt op die van a tot e en het lijnstuk AM dus gelijk is aan $\frac{ey}{a}$, dan zal de parameter gelijk zijn aan $\frac{ad}{e}$.

Nu is het lijnstuk CM gelijk aan $\frac{by}{a}$ en dus $ME = x - \frac{by}{a}$ en $MCE = x + \frac{by}{a}$, dus ME of MCE is gelijk aan v [4.32].

enim pro triplici juxta Regulam diſtinctione F C $\infty\, y \;8\; \frac{ff}{d}$,
atque etiam $\frac{ff}{d} - y$: ac proinde rectangulum ſub Parametro
ac eadem F C contentum $\infty\, dy \;8\; ff$, atque etiam $ff - dy$.
Quod quidem rectangulum cum æquale ſit quadrato appli-
catæ C E, hoc eſt, xx: erit, ut petitur, $dy.ff \;\infty\; xx$.

III. Si æquatio ſit $dy \;\infty\; vv$, vel $dy.ff \;\infty\; vv$, atque v primùm
aſſumpta ſit pro $x \;8\; c$, factâ A D $\infty\, c$, ſumptoque puncto D ab
A versùs B, ſi v ſit aſſumpta pro $x - c$; at contra ab altera
parte, ſi v aſſumpta fuerit pro $x + c$, erit, ductâ D K ipſi A C
parallelâ, diameter in recta D K. Et ſi terminus ff deficiat,
IV. erit vertex in D; ſin ſecus in L, cum triplici variatione, ut
ſupra expoſitum eſt. Et patet, D B ſive D A B, hoc eſt, K E
ſive K C E fore v, D K $\infty\, y$, atque L K $\infty\, y \;8\; \frac{ff}{d}$, atque etiam
$\frac{ff}{d} - y$: ac proinde rectangulum ſub Parametro d dictaque
D K comprehenſum $\infty\, dy$; at verò id quod ſub d & L K com-
prehenditur $\infty\, dy \;8\; ff$, atque etiam $ff - dy$. Quod quidem
rectangulum cum æquale ſit aut ſupponatur quadrato appli-
catæ K E ſive K C E, hoc eſt, vv: erit, ut petitur, $dy \;\infty\; vv$, vel
$dy.ff \;\infty\; vv$.

V. Sit deinde v aſſumpta pro $x \;8\; \frac{by}{a}$, ſumptoque in linea O C E
puncto M à C versùs E, ſi habeatur $- \frac{by}{a}$; at ab altera parte
lineæ A C, ſi habeatur $+ \frac{by}{a}$, ita ut A C ſit ad C M, ſicut a
ad b: erit in recta A M diameter, ejusque vertex in
VI. puncto A, ſi terminus ff deficiat; ſin minus, in N. Et poſitâ
ratione A C ad A M, ut a ad e, ac proinde recta A M $\infty\, \frac{ey}{a}$,
erit Parameter $\infty\, \frac{ad}{e}$. Eſt enim recta C M $\infty\, \frac{by}{a}$, ac proinde
M E $\infty\, y - \frac{by}{a}$, atque M C E $\infty\, y + \frac{by}{a}$, id eſt, M E vel
M C E $\infty\, v$. Quoniam ergo ex natura Paraboles rectangulum
ſub dicta Parametro & recta A M contentum ∞ quadrato ex
M E vel M C E, erit, $dy \;\infty\; vv$.

Porrò cum N A ſit $\infty\, \frac{ffe}{da}$, erit N M $\infty\, \frac{ey}{a} \;8\; \frac{ffe}{da}$, atque
etiam

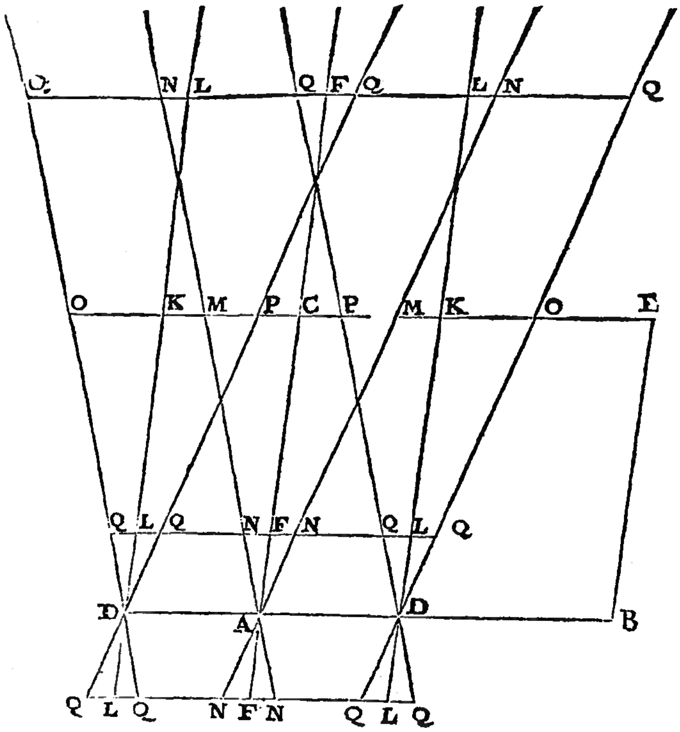
[316, vervolg]

Aangezien nu op grond van de aard van een parabool de rechthoek gevormd door de genoemde parameter en het lijnstuk *AM* gelijk is aan het vierkant op *ME* of *MCE*, zal gelden $dy = v^2$. Aangezien $NA = \frac{f^2e}{da}$, zal gelden $NM = \frac{ey}{a} \pm \frac{f^2e}{da}$ en ook $\frac{f^2e}{da} - \frac{ey}{a}$.

[317] Dus is ook de rechthoek ingesloten door de parameter en het lijnstuk *NM* gelijk aan $dy \pm f^2$ en ook gelijk aan $f^2 - dy$. Aangezien deze rechthoek gelijk is aan het vierkant op het lijnstuk *ME* of *MCE*, dit is aan v^2, zal ook gelden $dy \bullet f^2 = v^2$.

VII, VIII, IX. Laat tenslotte v aangenomen zijn in plaats van $x \pm \frac{by}{a} \pm c$: dan zal, onder dezelfde onderstellingen als hierboven, de middellijn liggen op *DO* of op *DP* en, indien de term f^2 ontbreekt, de top in *D*; zo niet, dan ligt de top in *Q*.

Wanneer de verhouding van *DK* tot *DO*, evenals de verhouding van *DK* tot *DP*, gesteld wordt op die van a tot e en dus het lijnstuk *DO*, evenals *DP*, gelijk is aan $\frac{ey}{a}$ dan zal de parameter gelijk zijn aan $\frac{ad}{e}$. Nu geldt $OE = x - \frac{by}{a} - c$ en etiam $\frac{ffe}{da} - \frac{ey}{a}$: ideoque rectangulum sub Parametro & recta N M contentum ∞ $dy \pm ff$, atque etiam $ff - dy$. Quod quidem rectangulum cum sit ∞ quadrato ex M E vel M C E, hoc est, vv; erit quoque $dy . ff \infty vv$.



Sit denique v assumpta pro $x \pm \frac{by}{a} \pm c$: eritque, sup-
VII. VIII. positis iisdem quæ supra, diameter in D O, vel in D P;
IX. &, si terminus ff deficiat vertex in D; sin minus, in Q. Et positâ ratione D K ad D O, ut & D K ad D P, sicut a ad e, ac proinde rectâ D O, ut & D P $\infty \frac{ey}{a}$; erit parameter $\infty \frac{ad}{e}$. Est enim O E ∞ $x - \frac{by}{a} - c$, atque

 OCE

[318] $OCE = x + \frac{by}{a} + c$ en evenzo geldt in het ene geval $PE = x - \frac{by}{a} + c$ en in het andere geval $PE = x + \frac{by}{a} - c$, dat wil zeggen dat *OE*, *OCE* en *PE* zowel in het ene geval als in het andere geval gelijk zijn aan v.

Ook is *QO* of *QP* (zoals hierboven *NM*) gelijk aan $\frac{ey}{a} \pm \frac{f^2e}{da}$ en ook gelijk aan $\frac{f^2e}{da} - \frac{ey}{a}$ en dus is de rechthoek, ingesloten door de parameter en *QO* of *QP*, gelijk aan $dy \pm f^2$ en ook gelijk aan $f^2 - dy$. Aangezien deze rechthoek gelijk is aan het vierkant op *OE* of *OCE* of op de ene *PE* of op de andere, dus gelijk aan v^2, daarom zal ook gelden $dy \bullet f^2 = v^2$.
Zo is in het algemeen bewezen wat op deze plaats gesteld was.

Maar indien tenslotte de vergelijking de gedaante heeft van één van de vormen die voorkomen onder Nr. 3 [4.33], dan zal de gezochte plaats een hyperbool zijn indien de term waarin x^2 of v^2 voorkomt, voorzien is van het plusteken; indien deze zelfde term echter voorzien is van het minteken, dan is de gezochte plaats een ellips.
Hierbij is slechts één uitzondering: wanneer in het laatste geval de rechten die geordend zijn aangebracht op de middellijn daarmee rechte hoeken maken en tegelijkertijd de transversale middellijn gelijk is aan de parameter; in dit geval immers blijkt, zoals duidelijk is, de gezochte plaats een cirkel te zijn.[4.6]
In het eerste geval nu, wanneer immers de term met x^2 of v^2 voorzien van het plusteken voorkomt en de gezochte plaats dus een hyperbool is, dan zal ook de term f^2 die daarmee aan dezelfde kant van de vergelijking staat, voorzien zijn van het plusteken of van het tegengestelde teken. Indien deze (term f^2, vert.) voorzien is van het minteken en in de vergelijking een breuk voorkomt, dan zal deze breuk ter wille van grotere duidelijkheid ondergebracht worden bij de term y^2 of z^2.
Daarna zal, met handhaving van elk van beide onbekende grootheden waarvan oorspronkelijk is uitgegaan, de vergelijking de volgende gedaante aannemen:

$$y^2 = \frac{lx^2}{g} + f^2 \quad \text{(dat is: } y^2 - f^2 = \frac{lx^2}{g}\text{)}$$

of

$$\frac{ly^2}{g} = x^2 - f^2 .$$

O C E $\infty x + \frac{by}{a} + c$; itemque P E una $\infty x - \frac{by}{a} + c$, ac P E altera $\infty x + \frac{by}{a} - c$, hoc eſt, O E, O C E, & P E una vel altera erit ∞v. Eſtque Q O vel Q P (ſicut ſupra N M) $\infty \frac{ey}{a} 8 \frac{ffe}{da}$, atque etiam $\frac{ffe}{da} - \frac{ey}{a}$: ac proinde rectangulum ſub Parametro & Q O vel Q P $\infty dy 8 ff$, atque etiam $ff - dy$. Quare cum idem rectangulum æquale ſit quadrato ex O E vel O C E, aut ex una alteravè P E, id eſt, vv: erit quoque $dy.ff \infty vv$.

Atque ita demonſtratum eſt generaliter, quod hoc loco propoſitum fuit.

At ſi denique æquatio ſimilis ſit alicui formularum ſub N° 3 comprehenſarum, erit Locus quæſitus, ſi terminus in quo invenitur xx vel vv ſigno + ſit affectus, Hyperbola; ſin idem terminus ſigno — affectus ſit, Ellipſis: excepto tantùm, cùm poſteriori caſu ordinatim ad diametrum applicatæ cum ea rectos angulos faciunt, & ſimul tranſverſa diameter parametro eſt æqualis: quippe eo caſu, ut patet, quæſitus Locus Circulus exiſtit.

Et primo quidem caſu, cùm nempe terminus in quo xx vel vv ſigno + affectus reperitur, ac proinde Locus quæſitus eſt Hyperbola, erit quoque terminus ff cum illo ab eadem æquationis parte conſtitutus vel ſigno + affectus, vel contra; & ſi ſigno — affectus ſit, atque in æquatione habeatur fractio, ipſa majoris perſpicuitatis gratiâ in terminum yy vel zz rejiciatur. Quo facto, remanente utrâque quantitate incognitâ primùm conceptâ, ſequenti formâ ſe exhibebit æquatio: $yy \infty \frac{lxx}{g} + ff$, (id eſt, $yy - ff \infty \frac{lxx}{g}$) aut $\frac{lyy}{g} \infty xx - ff$: eritque, ut in ſequenti figura, caſu primo, nempe ſi terminus ff cum termino in quo xx unam æquationis partem conſtituens ſigno + affectus ſit, diameter Hyperbolæ deſcribendæ in recta A X, quæ ducitur per punctum A poſitione datæ B E parallela. Sin contra, hoc eſt, ſi terminus ff ſigno — affectus ſit, uti caſu ſecundo, erit diameter in data poſitione recta A B, quæ indeterminatè pro x concipitur; ita ut ad

Caſus 1mus, cùm Locus eſt Hyperbola.

eaſdem

[318, vervolg]

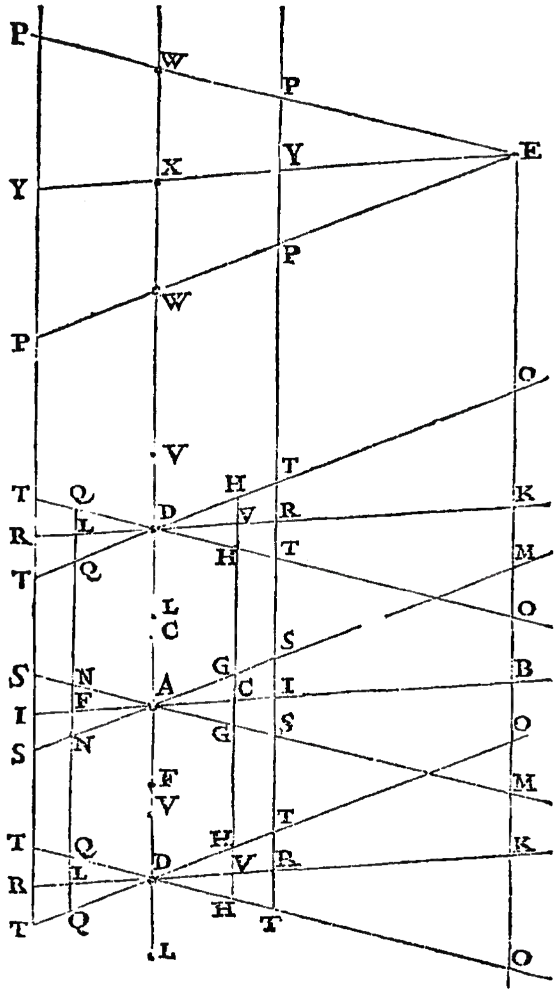
Het eerste geval waarin de plaats een hyperbool is.

In het eerste geval, zoals in de volgende figuur, indien namelijk de term f^2 met de term waarin x^2 voorkomt, aan dezelfde kant van de vergelijking staat en voorzien is van het plusteken, moet de middellijn van de hyperbool getekend worden op de rechte *AX* die getrokken is door het punt *A* in een richting evenwijdig aan *BE*, die in ligging gegeven is.

In het tegengestelde geval, dus indien de term f^2 voorzien is van het minteken, zoals in het tweede geval, zal de middellijn liggen op de rechte *AB*, die in ligging gegeven is en die volgens onderstelling willekeurig als x wordt aangenomen;
[319] hierbij maken de rechten die geordend zijn aangebracht op deze middellijnen hoeken die gelijk zijn aan de gegeven of aangenomen hoek *ABE*. In beide gevallen zal het middelpunt van de hyperbool in het punt *A* liggen en de halve dwarse zijde gelijk zijn aan f; deze wordt op de genoemde middellijnen weergegeven door achtereenvolgens de lijnstukken *AC* of *AF* [4.34].

Verder geldt het volgende: indien $l = g$ of, wat hetzelfde is, indien de term x^2 of y^2

eaſdem diametros ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel aſſumpto angulo ABE æquales: eritque caſu utroque centrum Hyperboles in puncto A, & ſemi-latus tranſverſum ∞ f, quod in



dictis diametris reſpectivè per lineas A C vel A F exprimatur. Porrò ſi l ſit ∞ g, vel, quod idem eſt, ſi termino xx vel yy nulla ad-

hæreat

[320] geen breuk als coëfficiënt heeft, dan zullen de dwarse zijde en de rechte zijde onderling gelijk zijn. Maar indien l en g als verschillend worden aangenomen, dan zal de verhouding van de dwarse zijde tot de rechte zijde zijn als die van l tot g [4.6].

Indien men nu onderstelt dat de genoemde hyperbool gaat door het punt C op elk van beide middellijnen, die respectievelijk lopen in de richting van X en van B en indien men onderstelt dat deze hyperbool de rechte XE die evenwijdig aan AB getrokken is, snijdt in E en dat hij ook BE snijdt in E, welke beide rechten (XE en BE, vert.) respectievelijk geordend zijn aangebracht op de genoemde middellijnen, dan geldt:

$$FX = y + f,\ FB = x + f,$$
$$CX = y - f,\ CB = x - f \qquad [4.35]$$

en dus geldt voor de bijbehorende rechthoek

$$FXC = y^2 - f^2 \text{ en } FBC = x^2 - f^2.$$

Wanneer echter, en dat doet zich voor als de rechte zijde gelijk is aan de dwarse zijde, de rechthoek FXC[1] gelijk is aan het vierkant op de zijde XE of AB, dat is x^2, en evenzo de rechthoek FBC gelijk is aan het vierkant op BE, dat is y^2, dan geldt

$$y^2 - f^2 = x^2, \quad \text{dat is} \quad y^2 = x^2 + f^2$$

en evenzo $x^2 - f^2 = y^2$, oftewel $y^2 = x^2 - f^2$.

Maar wanneer in het andere geval, waarin de rechte zijde ongelijk is aan de dwarse zijde, de verhouding van de een tot de ander is als l tot g en evenzo ook de verhouding van de rechthoek FXC tot het vierkant op XE, of van de rechthoek FBC tot het vierkant op BE, gelijk is[2] aan die van de dwarse zijde tot de rechte zijde, dat is die van l tot g, dan zal $y^2 - f^2$ staan tot x^2 zoals l staat tot g en evenzo $x^2 - f^2$ staan tot y^2 zoals l staat tot g, dit wil zeggen dat, na herleiding van de verhouding tot een gelijkheid, geldt

$$lx^2 = gy^2 - gf^2, \text{ evenals ook } ly^2 = gx^2 - gf^2.$$

Wanneer men dan alles gedeeld heeft door g geldt dus:

$$\frac{lx^2}{g} = y^2 - f^2, \text{ dat wil zeggen } y^2 = \frac{lx^2}{g} + f^2$$

en $$\frac{ly^2}{g} = x^2 - f^2.$$

Hetgeen te bewijzen was [3.3].

---

[1]prop. 10, Lib. I, blz. [196]; [2]prop. 10, Lib. I, blz. [196].

hæreat fractio, erunt latera transversum & rectum sibi invicem æqualia. At verò positis l & g inæqualibus, erit ratio lateris transversi ad rectum ut l ad g.

Si enim descripta intelligatur prædicta Hyperbola per punctum C in utraque diametro versùs X & versùs B respectivè; supponaturque eandem secare rectam X E, quæ ducta sit ipsi A B æquidistans, ut & ipsam B E, ad dictas diametros respectivè ordinatim applicatas, in puncto E: erit

$$FX \infty y+f, \qquad FB \infty x+f,$$
$$CX \infty y-f, \qquad CB \infty x-f;$$

ideoque rectangulum

$$FXC \infty yy-ff, \ \& \ FBC \infty xx-ff.$$

Cum autem latere recto ipsi transverso æquali existente rectangulum F X C [1] sit ∞ quadrato ex X E seu A B, hoc est, xx; itemque rectangulum F B C sit ∞ quadrato ex B E, hoc est, yy: erit $yy-ff \infty xx$, hoc est, $yy \infty xx+ff$ itemque

$$xx-ff \infty yy, \text{ sive } yy \infty xx-ff.$$

[1] per 10 primi hujus.

Sed cum secus recto latere ipsi transverso inæquali existente unius ad alterum ratio sit, ut l ad g; similiterque etiam ratio rectanguli F X C ad quadratum X E, aut rectanguli F B C ad quadratum B E eadem sit[2], quæ transversi lateris ad rectum, hoc est, eadem quæ l ad g: erit ut l ad g, ita $yy-ff$ ad xx; itemque ut l ad g, ita $xx-ff$ ad yy, hoc est, reductâ proportione ad æqualitatem, erit $lxx \infty gyy-gff$, ut & $lyy \infty gxx-gff$. unde divisis omnibus per g, fit $\frac{lxx}{g} \infty yy-ff$, hoc est, $yy \infty \frac{lxx}{g}+ff$; & $\frac{lyy}{g} \infty xx-ff$. Quod demonstrandum erat.

[2] per 10 primi hujus.

Casus 2dus, cùm Locus est Hyperbola.

At si quantitatum incognitarum primò conceptarum unâ ex æquatione sublatâ, aliâque in ejusdem locum juxta Regulam assumptâ, æquatio sit $zz \infty \frac{lxx}{g}+ff$ (id est, $zz-ff \infty \frac{lxx}{g}$), vel $\frac{lzz}{g} \infty xx-ff$: aut z assumpta erit pro $y \pm c$, vel pro $y \pm \frac{bx}{a}$, aut

§. 1. pro $y \pm \frac{bx}{a} \pm c$. Et quidem primò si z assumpta sit pro $y \pm c$, ducenda est per punctum A recta A D ipsi B E parallela & ∞c; ita ut, si z fuerit assumpta pro $y-c$, prædictum punctum D cadat ab eadem parte lineæ A B, quâ datus vel conceptus est angulus A B E. Sin contra z fuerit assumpta pro $y+c$, idem illud punctum

[320, vervolg]

Het tweede geval waarin de plaats een hyperbool is.

Indien echter van de onbekende grootheden die oorspronkelijk zijn aangenomen de ene uit de vergelijking is weggenomen en in plaats daarvan een andere volgens de Regel is aangenomen en daardoor de vergelijking luidt:

$$z^2 = \frac{lx^2}{g} + f^2 \text{ (dat is: } z^2 - f^2 = \frac{lx^2}{g}\text{) of } \frac{lz^2}{g} = x^2 - f^2$$

dan zal z aangenomen zijn ofwel in plaats van

$$y \pm c \text{ of } y \pm \frac{bx}{c}$$

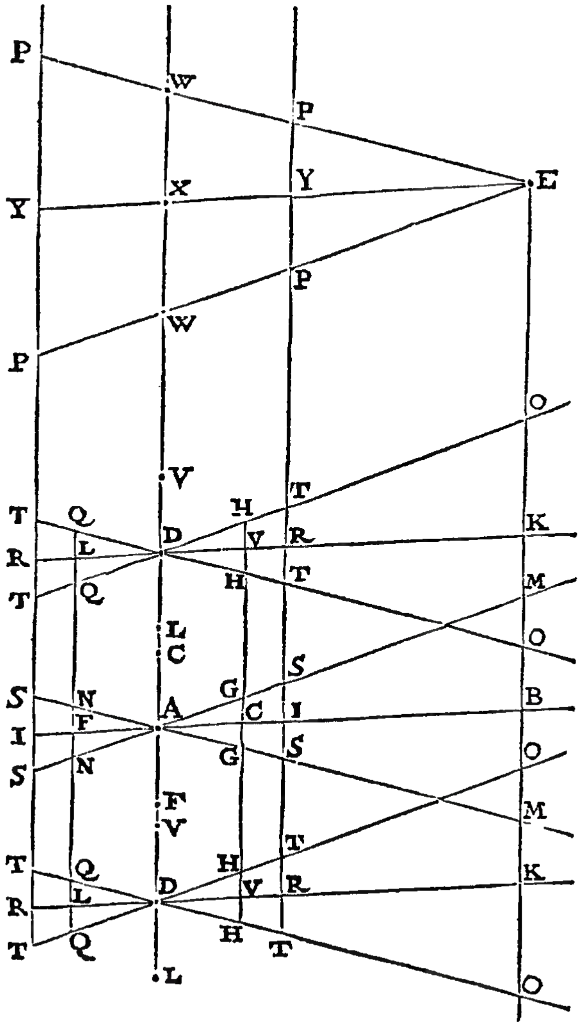
ofwel in plaats van

$$y \pm \frac{bx}{a} \pm c.$$

§1. In het eerste geval nu, indien z is aangenomen in plaats van $y \pm c$, moet men door het punt A het lijnstuk AD trekken, evenwijdig aan BE en gelijk aan c, zodanig dat het genoemde punt D aan dezelfde kant van de lijn AB valt als de gegeven of aangenomen hoek ABE, indien z is aangenomen in plaats van $y - c$. Indien daarentegen z is aangenomen in plaats van $y + c$,

[321] dan moet het punt D aan de andere kant van de lijn AB liggen.
Vervolgens moet men eerst door het punt D de rechte DK trekken, evenwijdig aan AB, die de rechte BE, zonodig verlengd, snijdt in het punt K.
De middellijn van de te beschrijven hyperbool zal liggen op de rechte DX indien de term f^2 voorzien is van het plusteken. In het tegenovergestelde geval, dat wil zeggen indien de term f^2 voorzien is van het minteken, ligt deze middellijn op

ctum D reperiatur ab altera parte lineæ A B. Deinde per punctum D ductâ rectâ D K ipsi A B parallelâ, quæ secet rectam B E productam, si opùs fuerit, in puncto K: erit describendæ Hyperbolæ



diameter, si terminus ff signo + affectus sit, in recta D X. sin contra, hoc est, si terminus ff signo — affectus sit, in prædicta

 recta

[322] de genoemde rechte DK. Hierbij moeten de rechten die geordend zijn aangebracht op deze middellijnen daarmee hoeken maken die gelijk zijn aan de gegeven of aangenomen hoek ABE of DKE of aan DXE .
In elk van beide gevallen zal D het middelpunt zijn en de halve transversale zijde gelijk zijn aan f, die op de genoemde middellijnen achtereenvolgens wordt weergegeven door DV of DL. Verder zal de verhouding van de dwarse zijde tot de rechte zijde zijn als l staat tot g.
Indien men nu aanneemt dat de genoemde hyperbool beschreven is door het punt V op elk van beide middellijnen, respectievelijk in de richting van X en van K en indien men veronderstelt dat deze de rechte XE evenals KE, die geordend zijn aangebracht op de genoemde middellijnen, snijdt in het punt E, dan zal DAX of KBE [4.36] gelijk zijn aan $y + c$ en DX of KE [4.37] zal gelijk zijn aan $y - c$; dus zullen DAX en KBE of DX en KE juist die grootheden zijn die als z zijn aangenomen en dus

$$LX = z + f \quad \text{en} \quad LK = x + f$$

en $$VX = z - f \quad \text{en} \quad VK = x - f.$$

en dus geldt voor de rechthoeken

$$LXV = z^2 - f^2 \quad \text{en} \quad LKV = x^2 - f^2.$$

Nu is de verhouding van zowel de ene rechthoek LXV als van de andere tot het vierkant op XE, alsook die van elk van beide rechthoeken LKV tot respectievelijk het vierkant op KE of KBE dezelfde als die van de dwarse zijde tot de rechte zijde, dat wil zeggen als die van l tot g.
Daarom zal ook gelden dat

$z^2 - f^2$ staat tot x^2 zoals l staat tot g

en eveneens dat $x^2 - f^2$ staat tot z^2 zoals l staat tot g;
dit betekent, als we de evenredigheid herleiden tot een gelijkheid,

$$\frac{lx^2}{g} = z^2 - f^2 \quad \text{oftewel} \quad z^2 = \frac{lx^2}{g} + f^2,$$

en $$\frac{lz^2}{g} = x^2 - f^2 \quad \text{of, indien } l = g,$$

$$z^2 = x^2 + f^2$$

en $$z^2 = x^2 - f^2.$$

Hetgeen nu hier te bewijzen was.

§2. In het tweede geval echter, waarin z is aangenomen in plaats van $y \pm \dfrac{bx}{a}$ [4.38], moet men eerst op de lijn BE het punt M aannemen, zodanig dat AB staat tot BM zoals a staat tot b, dus zo dat BM gelijk is aan $\dfrac{bx}{a}$ (dit punt M nu moet genomen worden aan dezelfde kant van AB als de gegeven of aangenomen hoek recta DK; ita ut ad easdem diametros ordinatim applicatæ angulos faciant, dato vel assumpto angulo ABE vel DKE sive DXE æquales. Eritque casu utroque D centrum, & semilatus transversum ∞f, quod in dictis diametris respectivè per lineas DV vel DL exprimatur; eritque porrò transversi lateris ad rectum ratio, ut l ad g. Si enim descripta intelligatur prædicta Hyperbola per punctum V in utraque diametro, versus X & K respectivè, eademque secare supponatur rectam XE, ut & ipsam KE, ad dictas diametros ordinatim applicatas, in puncto E: erit DAX sive KBE $\infty\, y + c$, & DX seu KE $\infty\, y - c$; ideoque eadem DAX & KBE vel DX & KE ea ipsa, quæ pro z est assumpta: ac propterea LX $\infty\, z + f$, & LK $\infty\, x + f$

atque VX $\infty\, z - f$, & VK $\infty\, x - f$:

ideoque rectangula

LXV $\infty\, zz - ff$, & LKV $\infty\, xx - ff$.

Cumque eadem sit ratio tam unius quàm alterius rectanguli LXV ad quadratum XE, ut & utriusque rectanguli LKV ad quadratum ex KE vel KBE respectivè, quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, ut l ad g: erit quoque ut

l ad g, ita $zz - ff$ ad xx,

itemque ut l ad g, ita $xx - ff$ ad zz:

hoc est, revocatâ proportione ad æqualitatem,

erit $\frac{lxx}{g} \infty\, zz - ff$, sive $zz \infty \frac{lxx}{g} + ff$,

& $\frac{lzz}{g} \infty\, xx - ff$: aut, si l sit $\infty\, g$,

erit $zz \infty\, xx + ff$,

& $zz \infty\, xx - ff$.

Quod quidem hîc demonstrandum erat.

§. 2. At verò secundò, si z assumpta sit pro y 8 $\frac{bx}{a}$, sumpto in linea BE puncto M, ita ut AB ad BM sit, sicut a ad b; hoc est, ut BM sit $\infty \frac{bx}{a}$, (quod quidem punctum M, si z assumpta fuerit pro $y - \frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ AB quâ datus vel conceptus angulus ABE sumendum est; sed contra, si habeatur $z \infty\, y + \frac{bx}{a}$, ab altera parte ejusdem lineæ AB sumi debet,) oportet per puncta A & M rectam lineam ducere AM, secantem HCH & QFQ per prædicta puncta C & F ductas ipsi BE parallelas in punctis G & N.

Quo

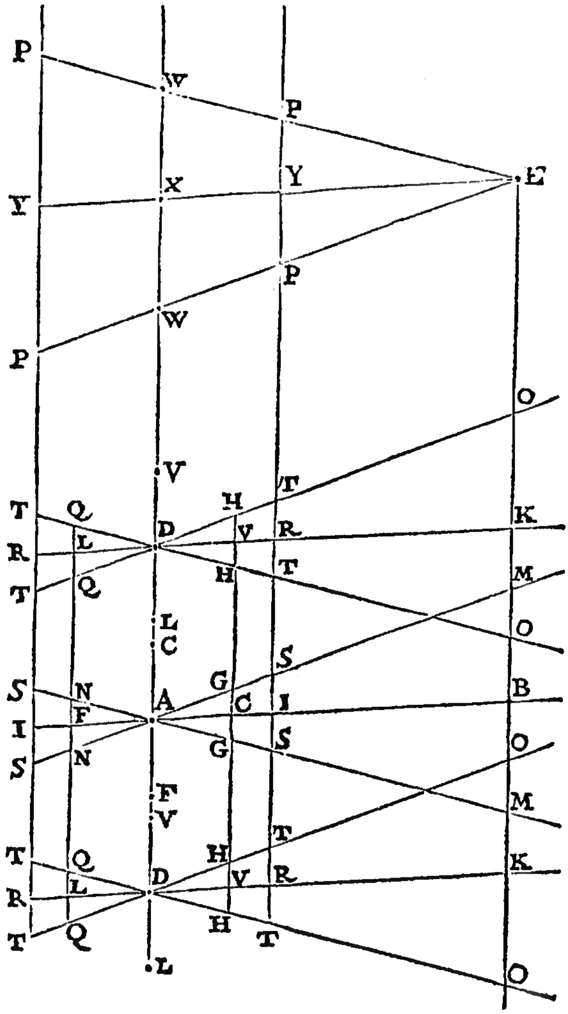
[322, vervolg]

ABE, indien z aangenomen is in plaats van $y - \frac{bx}{a}$, maar in het tegengestelde geval, indien geldt $z = y + \frac{bx}{a}$, moet M genomen worden aan de andere kant van de lijn AB); daarna moet men door de punten A en M de rechte lijn AM trekken die HCH en QFQ, evenwijdig aan BE getrokken door de genoemde punten C en F, snijdt in de punten G en N.

[323] Dan zal, indien de term f^2 voorzien is van het plusteken, de middellijn van de gezochte hyperbool liggen op de rechte AW, evenwijdig aan BE, en de daarop geordend aangebrachte rechten, zoals EW, zijn evenwijdig aan AM.

Maar in het tegengestelde geval, dat wil zeggen, indien de term f^2 voorzien is van het minteken, zal de middellijn liggen op de genoemde rechte AM zodanig dat de daarop geordend aangebrachte rechten daarmee hoeken maken die gelijk zijn aan de hoek AME of $AMBE$;

Quo facto, si terminus ff signo + affectus sit, erit quæsitæ Hyperbolæ diameter in recta A W ipsi B E parallela, ad quam ordinatim applicatæ, ut E W, sunt ipsi A M æquidistantes. Sin con-



tra, hoc est, si terminus ff signo — sit affectus, erit diameter in prædicta recta A M, ita ut ordinatim ad eam applicatæ cum ipsa

Ss 2 faciant

[324] zowel van de ene hyperbool als van de andere zal het middelpunt liggen in het punt A. En wat betreft zowel hun dwarse zijden als hun rechte zijden: van die hyperbool die op de middellijn AW beschreven wordt, zal de halve dwarse zijde gelijk zijn aan f (deze wordt ook hier weergegeven door AC of AF) en de verhouding van deze dwarse zijde tot de rechte zijde is als a^2l tot e^2g; hierbij stellen we namelijk dat de verhouding van AB tot de getrokken AM is als a tot e.

Van de hyperbool echter die beschreven wordt op de middellijn AM zal de halve dwarse zijde AG of AN zijn. Deze AG of AN nu zal gelijk zijn aan $\frac{ef}{a}$, aangezien AC of AF, dat wil zeggen f, staat tot AG of AN, zoals AB staat tot AM oftewel zoals a staat tot e. Ook zal de verhouding van deze dwarse zijde tot de rechte zijde zijn als e^2l staat tot a^2g.

Indien we ons voorstellen dat de genoemde hyperbool beschreven is door het genoemde punt C op de middellijn AW en ook door het punt G op de middellijn AM [4.39] en indien we veronderstellen dat de rechte ME of WE, geordend aangebracht op deze middellijnen, door de genoemde hyperbool gesneden wordt in het punt E,

dan zal gelden: $MBE \text{ (of } AXW) = y + \frac{bx}{a}$ [4.40]

en $ME \text{ (of } AW) = y - \frac{bx}{a}$ [4.41],

dat wil zeggen dat AXW of MBE, evenals ook AW of ME, juist de grootheid is die als z is aangenomen. Evenwel geldt AM (of WE) $= \frac{ex}{a}$ en verder (dit is het eerste geval) wanneer de hyperbool beschreven is op de middellijn AW (wanneer immers de term f^2 voorzien is van het plusteken), geldt

$FW \text{ (of } FXW) = z + f$ en $CW \text{ (of } CXW) = z - f$,

en dus geldt voor de rechthoek

$FWC \text{ (of } FXWC) = z^2 - f^2$ [4.42] en het vierkant op WE is gelijk aan $\frac{e^2x^2}{a^2}$.

Nu staat de genoemde rechthoek tot het genoemde vierkant zoals de dwarse zijde staat tot de rechte zijde; in dit geval betekent dit dat $z^2 - f^2$ staat tot $\frac{e^2x^2}{a^2}$ zoals a^2l staat tot e^2g. Daarom zal

$$e^2lx^2 = e^2gz^2 - e^2gf^2 \text{ en, nadat alles gedeeld is door } e^2g,$$

$$\frac{lx^2}{g} = z^2 - f^2, \text{ dat is } z^2 = \frac{lx^2}{g} + f^2.$$

Maar in het tweede geval, waarin de hyperbool is beschreven op de middellijn AM, wanneer immers de term f^2 voorzien is van het minteken, zal gelden faciant angulos angulo A M E vel A M B E æquales: eritque tam unius quàm alterius Hyperbolæ centrum in puncto A. Et quantùm ad earundem latera tam transversa quàm recta, erit ejus Hyperboles, quæ ad diametrum A W describitur, semi-latus transversum ꝏ f (idque iterum exprimatur per A C vel A F), & ratio ejusdem transversi lateris ad rectum, ut aal ad eeg; posito nimirum quòd ratio ipsius A B ad ductam A M sit ut a ad e; at verò Hyperboles, quæ ad diametrum A M describitur, semi-latus transversum erit A G vel A N. Quæ quidem A G vel A N erit ꝏ $\frac{ef}{a}$; cum sit ut A B ad A M, sive ut a ad e; ita A C vel A F, hoc est, f, ad A G vel A N; & ratio ejusdem transversi lateris ad rectum, ut eel ad aag. Si enim prædicta Hyperbola descripta intelligatur, transiens per prædictum punctum C in diametro A W & per punctum G in diametro A M, præsupponaturque rectam M E vel W E ordinatim ad easdem diametros applicatas à prædicta Hyperbola secari in puncto E: erit M B E vel A X W ꝏ $y + \frac{bx}{a}$, & M E vel A W ꝏ $y - \frac{bx}{a}$, hoc est, A X W seu M B E, uti & A W seu M E ea ipsa erit, quæ pro z assumpta est. Est autem A M seu W E ꝏ $\frac{ex}{a}$, ac porrò casu priori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum A W, (cùm nempe terminus ff signo + est affectus) F W sive F X W ꝏ $z + f$,

& C W sive C X W ꝏ $z - f$:

ideoque rectangulum

F W C vel F X W C ꝏ $zz - ff$, & quadratum W E ꝏ $\frac{eexx}{aa}$.

Cumque sit ut latus transversum ad rectum, ita prædictum rectangulum ad prædictum quadratum, hoc est, eo casu ut aal ad eeg, ita $zz - ff$ ad $\frac{eexx}{aa}$: erit $eelxx$ ꝏ $eegzz - eegff$, &, omnibus per eeg divisis, $\frac{lxx}{g}$ ꝏ $zz - ff$, id est, zz ꝏ $\frac{lxx}{g} + ff$.

At verò casu posteriori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum A M, cùm nempe terminus ff signo — est affectus, erit N M ꝏ $\frac{ex}{a} + \frac{ef}{a}$, & G M ꝏ $\frac{ex}{a} - \frac{ef}{a}$: ideoque rectangulum N M G ꝏ $\frac{eexx}{aa} - \frac{eeff}{aa}$. Cumque sit ut latus transversum ad rectum, id est, hoc casu, ut eel ad aag, ita prædictum rectangulum N M G ad

[324, vervolg]

$NM = \frac{ex}{a} + \frac{ef}{a}$ en $GM = \frac{ex}{a} - \frac{ef}{a}$

en dus zal voor de rechthoek *NMG* gelden

$$NMG = \frac{e^2x^2}{a^2} - \frac{e^2f^2}{a^2}.$$

Nu staat genoemde rechthoek *NMG* tot het vierkant op *ME* of op *MBE*, dat is tot z^2,
[325] zoals de dwarse zijde staat tot de rechte zijde, dat is in dit geval zoals e^2l tot a^2g.

Daarom zal $\frac{e^2x^2 - e^2f^2}{a^2}$ staan tot z^2 zoals e^2l tot a^2g en dus geldt

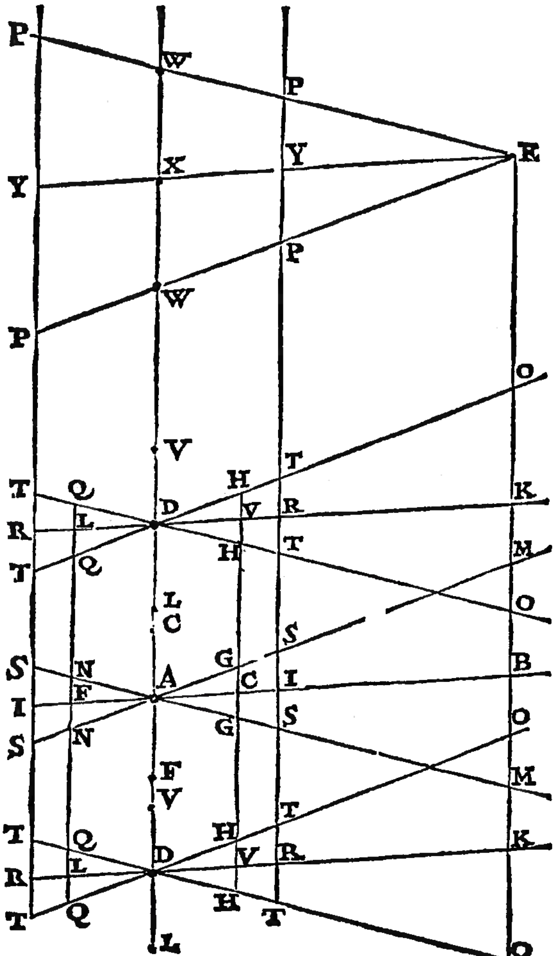
$$e^2lz^2 = e^2gx^2 - e^2gf^2.$$

Dit betekent, na deling door e^2g,

$$\frac{lz^2}{g} = x^2 - f^2.$$

Hetgeen hier te bewijzen was.

ad ME vel MBE quadratum, hoc eſt, ad zz: erit ut eel ad aag, ita $\frac{eexx-eeff}{aa}$ ad zz: ac proinde $eelzz \infty eegxx - eegff$.



Hoc eſt, factâ diviſione per eeg, erit $\frac{lzz}{g} \infty xx - ff$. Quod hîc demonſtrandum erat.

[326] §3. Indien tenslotte, in het derde geval, z is aangenomen in plaats van $y \pm \frac{bx}{a} \pm c$, dan moet men eerst, zoals hierboven, AD trekken, gelijk aan c (de tekst vermeldt ten onrechte f, vert.) [4.43] en DK evenwijdig aan AB; wanneer men dan op de lijn KE een punt O genomen heeft zodanig dat DK staat tot KO zoals a staat tot b, dat wil zeggen zo dat KO gelijk is aan $\frac{bx}{a}$, dan moet men door de punten D en O de rechte DO trekken die de genoemde HCH in H snijdt en de genoemde QFQ in Q ontmoet. (Het is duidelijk op grond van wat eerder is uiteengezet, dat het genoemde punt O aan dezelfde kant van de lijn AB genomen moet worden als de gegeven of aangenomen hoek ABE, indien men heeft $-\frac{bx}{a}$, maar dat men dit punt aan de andere kant van deze lijn moet nemen indien men heeft $+\frac{bx}{a}$). Hierdoor zal de middellijn van de gezochte hyperbool liggen op de rechte DW indien de term f^2 voorzien is van het plusteken. Maar in het tegengestelde geval dat wil zeggen indien de term f^2 voorzien is van het minteken, zal deze (middellijn, vert.) op de genoemde rechte DO liggen; hierbij is het zo, dat de rechten die geordend zijn aangebracht op deze middellijnen daarmee hoeken maken die gelijk zijn aan DWE dan wel $DXWE$ enerzijds of DOE dan wel $DOKE$ anderzijds [4.44]; zowel van de ene hyperbool als van de andere zal het middelpunt in D liggen. Wat betreft hun zijden, zowel de dwarse als de rechte: van de hyperbool die beschreven wordt op de middellijn DW, dat wil zeggen indien de term f^2 voorzien is van het plusteken, is de halve dwarse zijde gelijk aan f (de tekst vermeldt ten onrechte de *dwarse zijde*, vert.) en ook hier wordt deze weergegeven door DV of DL en de verhouding van deze dwarse zijde tot de rechte zijde is als a^2l tot e^2g.

Van de hyperbool echter die beschreven wordt op de middellijn DO, het geval immers waarin de term f^2 voorzien is van het minteken, zal de halve dwarse zijde het lijnstuk DQ of DH zijn, dat wil zeggen $\frac{ef}{a}$ en de verhouding van deze dwarse zijde tot de rechte zijde is als e^2l tot a^2g.

Indien we ons de beschreven hyperbool voorstellen, gaande door het punt V op de middellijn DW en door het punt H op de middellijn DO en indien we onderstellen dat deze hyperbool de rechte WE of OE snijdt in het punt E, dan zal $OKBE$ of $DAXW$ gelijk zijn aan $y + c + \frac{bx}{a}$ en OE of DW gelijk zijn aan $y - c - \frac{bx}{a}$ en OBE of DAW gelijk aan $y + c - \frac{bx}{a}$ en OKE of DXW gelijk aan $y - c + \frac{bx}{a}$ (de tekst vermeldt ten onrechte d i.p.v. c, vert.).

Dit betekent dat al deze eerder genoemde lijnstukken dezelfde zijn als diegene, die als z zijn aangenomen.

§. 3. Si denique tertiò z assumpta sit pro $y \mathbin{8} \frac{bx}{a} \mathbin{8} c$, ductâ, ut supra, A D ∞f, & D K ipsi A B parallelâ, sumptoque in linea K E puncto O; ita ut D K ad K O sit, sicut a ad b, hoc est, ut K O sit $\infty \frac{bx}{a}$, ducenda est per puncta D & O recta D O, secans prædictam H C H in H, atque occurrens præfatæ Q F Q in Q. (Constat autem ex superiùs explicatis prædictum punctum O, si in æquatione habeatur $-\frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ A B sumendum esse, quâ datus aut assumptus est angulus A B E; at si habeatur $+\frac{bx}{a}$, illud ipsum punctum ex altera ejusdem lineæ parte sumi debere.) Quo facto, si terminus ff signo + affectus sit, erit diameter quæsitæ Hyperbolæ in recta D W. Sin contra, hoc est, si terminus ff signo — sit affectus, erit ipsa in prædicta recta D O; ita ut ad easdem diametros ordinatim applicatæ angulos faciant angulo D W E sive D X W E, aut D O E sive D O K E æquales: eritque tam unius quàm alterius Hyperbolæ centrum in puncto D. Et quantùm ad earundem latera tam transversa quàm recta, erit ejus Hyperbolæ, quæ ad diametrum D W describitur, hoc est, cùm terminus ff signo + afficitur, latus transversum ∞f. idque hîc iterum exprimatur per D V vel D L, ac ratio ejusdem lateris transversi ad rectum, ut aal ad eeg; at verò Hyperboles, quæ ad diametrum D O describitur, nimirum, quando terminus ff signo — affectus est, erit semi-latus transversum recta D Q vel D H, id est, $\frac{ef}{a}$; atque ratio ejusdem lateris transversi ad rectum, ut eel ad aag. Si enim descripta intelligatur Hyperbola, transiens per punctum V in diametro D W & per punctum H in diametro D O, supponaturque eandem Hyperbolam secare rectam W E vel O E in puncto E, erit O K B E sive D A X W $\infty y+c+\frac{bx}{a}$, & O E sive D W $\infty y-c-\frac{bx}{a}$, ac O B E sive D A W $\infty y+c-\frac{bx}{a}$, atque O K E vel D X W $\infty y-d+\frac{bx}{a}$. Hoc est, erunt omnes illæ prænominatæ lineæ eædem, quæ pro z assumptæ sunt. Est autem D O seu W E $\infty \frac{ex}{a}$, ideoque quadratum W E $\infty \frac{eexx}{aa}$: ac porrò casu priori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum

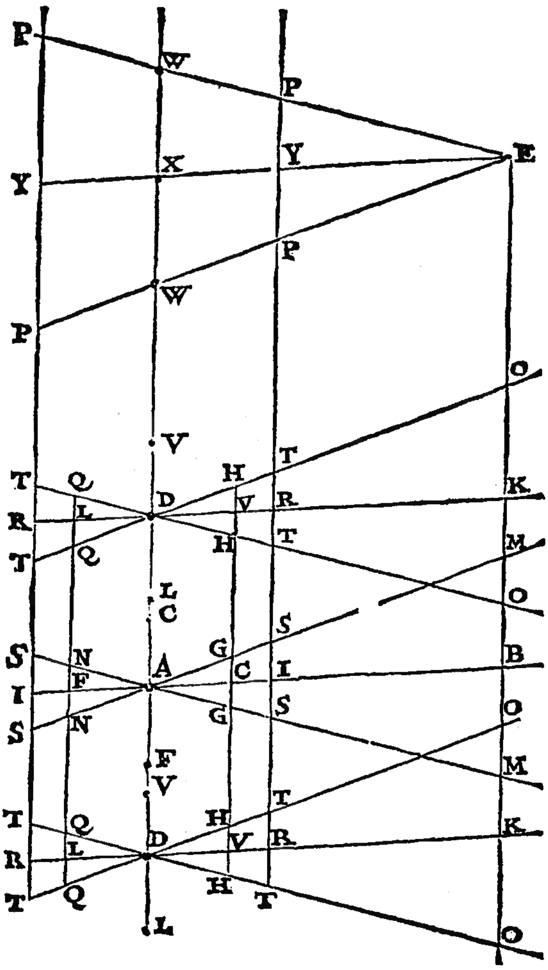
D W,

[326, vervolg]

Er geldt echter: DO (of WE) = $\frac{ex}{a}$ en dus is het vierkant op WE gelijk aan $\frac{e^2x^2}{a^2}$;
verder geldt – en dit is het eerste geval – wanneer de hyperbool beschreven is op de middellijn DW,

[327] indien immers de term f^2 voorzien is van het plusteken, LW (of LXW) = $z + f$ en VW (of VWX) = $z - f$ en dus de rechthoek LWV (of $LXWV$) = $z^2 - f^2$.
Nu staat de genoemde rechthoek tot het vierkant op WE zoals de dwarse zijde staat tot de rechte zijde, dat wil zeggen in dit geval geldt dat $z^2 - f^2$ staat tot $\frac{e^2x^2}{a^2}$ zoals a^2l staat tot e^2g.

DW, cùm nempe terminus ff ſigno $+$ afficitur, L W ſive LXW $\propto z+f$, & V W ſive V X W $\propto z-f$: ideoque rectangulum L W V ſive L X W V $\propto zz-ff$. Cumque ſit ut latus



tranſverſum ad rectum, ita prædictum rectangulum ad W E quadratum, hoc eſt, eo caſu, ut aal ad eeg, ita $zz-ff$ ad

$eexx$

[328] Daarom geldt $e^2lx^2 = e^2gz^2 - e^2gf^2$ en nadat alles gedeeld is door e^2g:

$$\frac{lx^2}{g} = z^2 - f^2, \text{ oftewel } z^2 = \frac{lx^2}{g} + f^2.$$

Maar in het tweede geval, waarin de hyperbool beschreven is op de middellijn DO, zal gelden: $QO = \frac{ex}{a} + \frac{ef}{a}$ en $HO = \frac{ex}{a} - \frac{ef}{a}$, dus geldt voor rechthoek QOH

$$QOH = \frac{e^2x^2}{a^2} - \frac{e^2f^2}{a^2}.$$

Nu geldt weer dat de genoemde rechthoek QOH staat tot het vierkant op $OKBE$ of OE, of OBE of OKE [4.45] als de dwarse zijde staat tot de rechte zijde, dat betekent in dit geval dat $\frac{e^2x^2}{a^2} - \frac{e^2f^2}{a^2}$ staat tot z^2 zoals e^2l staat tot a^2g.

Daarom zal dus ook gelden $e^2lz^2 = e^2gx^2 - e^2gf^2$. Dit betekent, nadat alles gedeeld is door e^2g, dat $\frac{lz^2}{g} = x^2 - f^2$.

Dit nu is alles wat in het bovenstaande geval, met onderscheiding van drie mogelijkheden, te bepalen en te bewijzen was.

Het derde geval waarin de plaats een hyperbool is.

Indien echter van de onbekende grootheden die oorspronkelijk zijn aangenomen de ene uit de vergelijking is weggenomen en in plaats daarvan een andere volgens de Regel is aangenomen en daardoor de vergelijking luidt:

$$y^2 = \frac{lv^2}{g} + f^2 \text{ (dus } y^2 - f^2 = \frac{lv^2}{g}\text{) of } \frac{ly^2}{g} = v^2 - f^2$$

en v slechts is aangenomen in plaats van x vermeerderd of verminderd met een of andere bekende grootheid, dan veronderstellen we dat v aangenomen is in plaats van $x \pm h$.

In dit geval moet men op het lijnstuk AB, of op het verlengde daarvan, een punt I nemen, zó dat $AI = h$ (dit punt I moet genomen worden vanuit A in de richting van B indien v aangenomen is in plaats van $x - h$; in het tegengestelde geval moet het genomen worden aan de andere kant van A, op het verlengde van BA). Hierdoor zal ditzelfde punt I het middelpunt zijn van de hyperbool die beschreven moet worden en, met de noodzakelijke wijzigingen, geldt al het overige dat hierboven onder het eerste geval is vermeld: namelijk, de middellijn ligt op de rechte IY of op de rechte IB, de halve dwarse zijde is f en de verhouding van de dwarse zijde tot de rechte zijde is als l staat tot g.

Het vierde geval waarin de plaats een hyperbool is.

Stel tenslotte dat van de onbekende grootheden die oorspronkelijk zijn aangenomen, elk van beide uit de vergelijking is weggenomen en andere volgens de Regel in hun

$\frac{eexx}{aa}$: erit $eelxx \infty eegzz - eegff$, ac, divisis omnibus per eeg, $\frac{lxx}{g} \infty zz - ff$, sive $zz \infty \frac{lxx}{g} + ff$.

At verò casu posteriori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum D O, erit Q O $\infty \frac{ex}{a} + \frac{ef}{a}$, & H O $\infty \frac{ex}{a} - \frac{ef}{a}$; ideoque rectangulum Q O H $\infty \frac{eexx - eeff}{aa}$. Cumque iterum sit, ut latus transversum ad rectum, ita prædictum rectangulum Q O H ad quadratum ex O K B E vel O E, sive O B E aut O K E: id est, eo casu, ut eel ad aag, ita $\frac{eexx - eeff}{aa}$ ad zz: erit quoque proinde $eelzz \infty eegxx - eegff$. Hoc est, divisis omnibus per eeg, erit $\frac{lzz}{g} \infty xx - ff$. Quæ quidem omnia sunt, quæ casu superiori in triplici sua distinctione determinanda ac demonstranda erant.

Casus 3tius, cùm Locus est Hyperbola. Si verò quantitatum incognitarum ab initio conceptarum, alterâ ex æquatione sublatâ, aliâque ejusdem loco secundùm Regulam assumptâ, æquatio sit $yy \infty \frac{lvv}{g} + ff$, (id est, $yy - ff \infty \frac{lvv}{g}$) aut $\frac{lyy}{g} \infty vv - ff$; atque ipsa v tantùm assumpta sit pro x ♉ notâ aliquâ quantitate, Sit v assumpta pro x ♉ b; Hoc casu in linea A B vel eadem productâ sumendum est punctum I, ita ut A I sit ∞ b (quod quidem punctum I, si v assumpta fuerit pro $x - b$, ab A versùs B; Sin contra, ab altera parte puncti A in producta B A sumi debet.) Quo facto, erit idem illud punctum I centrum describendæ Hyperboles, &, mutatis mutandis, cætera omnia, ut supra casu 1mo memoratum est, nempe, diameter in recta I Y vel in recta I B, semi-latus transversum ∞f, atque proportio lateris transversi ad rectum, ut l ad g.

Casus 4tus, cùm Locus est Hyperbola. Si denique quantitatum incognitarum, primò conceptarum, utrâque ex æquatione sublatâ, aliisque earundem loco juxta Regulam assumptis, æquatio sit $zz \infty \frac{lvv}{g} + ff$, (id est, $zz - ff \infty \frac{lvv}{g}$), aut $\frac{lzz}{g} \infty vv - ff$; atque z primùm assumpta sit pro y ♉ c, ducenda est utrinque I R parallela B E, & ∞ c: quo facto, erit idem illud punctum R centrum, & diameter in recta R Y vel

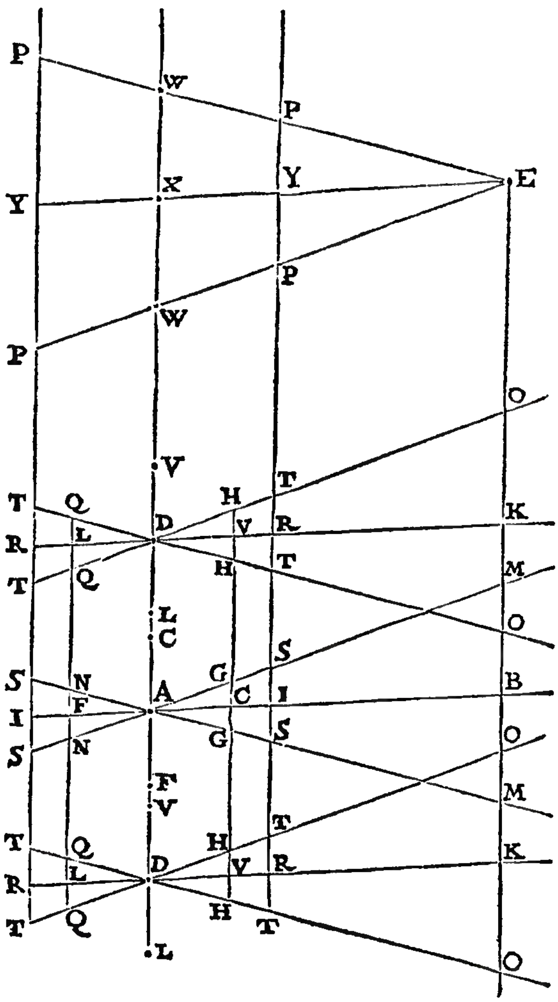
[328, vervolg]
plaats zijn aangenomen en dat de vergelijking daardoor luidt

$$z^2 = \frac{lv^2}{g} + f^2 \qquad \left(\text{dus } z^2 - f^2 = \frac{lv^2}{g}\right) \text{ of } \frac{lz^2}{g} = v^2 - f^2.$$

§1. Laat dan allereerst z aangenomen zijn in plaats van $y \pm c$ [4.46], dan moet men aan beide kanten (van *DAWX* en van *AB*, vert.) *IR* trekken, evenwijdig aan *BE* en gelijk aan c. Hierdoor zal dit punt *R* het middelpunt zijn en zal de middellijn liggen op de rechte *RY* of *RK*;

[329] de halve dwarse zijde is f en de verhouding van de dwarse zijde tot de rechte zijde is als l staat tot g, zoals dit alles, met de noodzakelijke wijzigingen, bij het tweede geval §1, [4.47], uitvoeriger uiteengezet is.

§2. Indien echter z aangenomen is in de plaats van $y \pm \frac{bx}{a}$, dan zal het punt *S* vel R K, ejusque semi-latus transversum ∞f, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut l ad g. quemadmodum ea omnia, mutatis mutandis, casu secundo §. 1. fusiùs explicata sunt.



§. 2. At si z assumpta fuerit pro $y \infty \frac{bx}{a}$, erit punctum S, in

[330] waar *MA*, of de daaraan in richting toegevoegde [4.48], door de genoemde *IR* of , zonodig het verlengde daarvan, gesneden wordt, het middelpunt van de kegelsnede (!) zijn en al het overige zal, met de noodzakelijke veranderingen, verlopen zoals hierboven onder het tweede geval, §2 vermeld is (blz. [322], vert.).
Zo zal de middellijn van de kegelsnede (!) liggen op de rechte *SP* of *SM* (en evenals dáár *AM* of *EW* gelijk was aan $\frac{ex}{a}$, zo zal hier *SM* of *EP* gelijk zijn aan $\frac{ev}{a}$: immers *BI*, dat is v, staat tot *SM* zoals *AB* staat tot *AM*, dat is zoals a staat tot e); verder zal de halve dwarse zijde gelijk zijn aan f of $\frac{ef}{a}$ en de verhouding van de dwarse zijde tot de rechte zijde als a^2l tot e^2g of als e^2l tot a^2g.

§3. Indien tenslotte z aangenomen is in de plaats van $y \pm \frac{bx}{a} \pm c$, dan zal het punt *T* waar *DO*, of de daaraan in richting toegevoegde [4.48], door de genoemde *IR*, of, zonodig, het verlengde daarvan, gesneden wordt, het middelpunt zijn en al het overige zal, met de noodzakelijke veranderingen, verlopen zoals in de vorige paragraaf en hierboven in §3 van het tweede geval (waarin de plaats een hyperbool is; zie blz. [326], vert.), uitvoeriger uiteengezet is.
Van al deze zaken is het bewijs in het voorgaande duidelijk samengevat, terwijl de termen en grootheden hier, overeenstemmen met de voorafgaande, slechts met die uitzondering dat de grootheden die daar met x aangeduid werden, hier zijn $x \pm h$, dat wil zeggen v.
Zo is het dat, waar daar gold *AB* en $EX = x$, hier geldt *IB* en $EY = v$; waar daar gold *DK* en $EX = x$, hier geldt *RK* en $EY = v$; waar daar gold *AM* en $EW = \frac{ex}{a}$, hier geldt *SM* en $EP = \frac{ev}{a}$; waar daar gold *DO* en $EW = \frac{ex}{a}$, hier geldt *TO* en $EP = \frac{ev}{a}$.

Hoewel het echter volgens de Regel ook kan gebeuren dat v samengesteld is uit x vermeerderd of verminderd met een of andere grootheid, die ook in combinatie met de onbekende y voorkomt, zodanig echter dat in dit geval z alleen kan bestaan uit y vermeerderd of verminderd met een andere geheel bekende grootheid, achten wij het toch geenszins de moeite waard alle gevallen die hierop betrekking hebben in detail na te gaan, aangezien op grond van wat eerder uiteengezet is, zowel bij de parabolische plaatsen als in het vorige voorbeeld van de herleiding van vergelijkingen tot de gedaanten van de stellingen 12 en 13 hierboven, ook deze gevallen op zichzelf duidelijk zijn en in het voorafgaande ook geheel en al besloten liggen, indien men namelijk overal x vervangt door y en omgekeerd en deze x niet uitdrukt door de rechte *AB*, maar door die welke vanuit *A* evenwijdig aan *BE* getrokken is en y niet door *BE*, maar door de rechte die evenwijdig is aan *AB*.
Deze algemene opmerking zal hier voldoende zijn.

quo MA, vel quæ ipsi in directum adjungitur, per prædictam IR, vel eandem productam, si opùs sit, intersecatur, centrum sectionis; & cætera omnia, mutatis mutandis, ut supra casu secundo §. 2. memoratum est. Nempe erit sectionis diameter in recta SP vel SM (atque ut ibidem AM seu EW erat $\propto \frac{ex}{a}$, ita hîc SM seu EP erit $\propto \frac{ev}{a}$: cum sit ut AB ad AM, hoc est, ut a ad e, ita BI, hoc est, v, ad SM); eritque porrò semi-latus transversum $\propto f$ & $\frac{ef}{a}$ respectivè, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut aal ad eeg, vel ut eel ad aag.

§. 3. Si denique z assumpta fuerit pro $y \pm \frac{bx}{a} \pm c$, erit punctum T, in quo DO, vel quæ ipsi in directum adjungitur, per prædictam IR, vel productam, si opùs sit, intersecatur, centrum; & reliqua omnia, mutatis mutandis, ut paragrapho præcedenti, & supra casu secundo §. 3. fusiùs expositum est. Atque eorum omnium demonstratio in præcedentibus explicitè est comprehensa, cum termini & quantitates omnes hîc cum prioribus conveniant, excepto tantùm, quòd, quæ ibidem designabantur per x, hîc sint $x \pm b$, hoc est, v. Ita enim quod ibi erat AB & EX $\propto x$, hîc est IB & EY $\propto v$; quod ibi erat DK & EX $\propto x$, hîc est RK & EY $\propto v$; quod ibi erat AM & EW $\propto \frac{ex}{a}$, hîc est SM & EP $\propto \frac{ev}{a}$; quod ibi erat DO & EW $\propto \frac{ex}{a}$, hîc est TO & EP $\propto \frac{ev}{a}$.

Quamvis autem secundùm Regulam accidere etiam possit, ut v composita sit ex $x \pm$ aliâ quâdam quantitate, cui & incognita y permixta sit; ita tamen, ut eo casu z solummodo ex $y \pm$ aliâ quantitate in totum cognitâ constare queat, haudquaquam tamen operæ pretium existimamus, casus omnes eò spectantes speciatim persequi: cum ex iis, quæ tam in Locis Parabolicis quàm in posteriori exemplo reductionis æquationum ad formulas Theorematum 12^mi & 13^tii superiùs explicata sunt, iidem illi casus per se manifesti sint atque in præcedentibus etiam omnino plenèque comprehendantur, si nimirum, substituto per omnia x loco y & vice versâ, eadem x non per rectam AB sed per eam, quæ ex A ipsi BE parallela ducta sit, atque y non per BE sed per rectam ipsi AB æquidistantem, designetur. Quòd hîc generaliter monuisse suffecerit.

Aliæ

[331]

Vier andere gevallen waarin de Plaats een Hyperbool is.

Tenslotte dit: zoals we hierboven opmerkten, kan het ook gebeuren dat de vergelijking luidt

1. $yx = f^2$,
2. $zx = f^2$,
3. $yv = f^2$,
4. $zv = f^2$,

waarbij in al deze gevallen de gezochte plaats een hyperbool is, waarvan de bepaling of de beschrijving, alsook het bijbehorende bewijs, vanzelf voortvloeit uit wat reeds eerder uiteengezet is.

Indien wij in het eerste geval nu op de rechte AB een lijnstuk AC nemen gelijk aan f, en vanuit het punt C een lijnstuk CD oprichten, evenwijdig aan BE en gelijk aan het eerder genoemde lijnstuk AC dat is gelijk aan f, en door A en D een rechte trekken, dan zal A het middelpunt zijn van een hyperbool waarvan de as op de rechte AD ligt, waarvan het punt D de top is en AB een asymptoot. Anders gezegd (wanneer men eerst het lijnstuk DF trekt, loodrecht op AD en begrensd door AB): AD zal de halve dwarse zijde zijn en de verhouding van de dwarse zijde tot de rechte zijde zal zijn als het vierkant op AD tot het vierkant op DF .
Indien we namelijk aannemen dat de genoemde hyperbool de rechte BE snijdt in het punt E, dan zal[1] de rechthoek ABE gelijk zijn aan het vierkant op AC of CD [4.49].
Aangezien $AB = x$, $BE = y$ en $AC = f$, zal dus gelden $xy = f^2$.
Dit moest in het eerste geval bewezen worden.

In het tweede geval, waarin namelijk de vergelijking luidt: $zx = f^2$, moet men volgens de Regel z aannemen in plaats van y vermeerderd of verminderd met een of andere bekende grootheid.

---

[1] prop. 3, Lib. I, blz. [180].

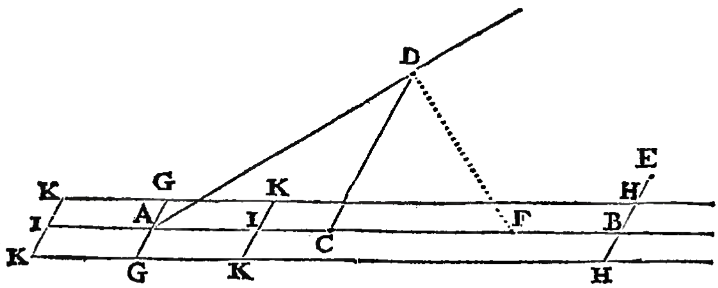
Alii quatuor caſus, cùm Locus eſt Hyperbola.

Iam verò quod ſupra annotavimus accidere quoque poſſe, ut æquatio ſit

$$1.\ yx \infty ff,$$
$$2.\ zx \infty ff,$$
$$3.\ yv \infty ff,$$
$$4.\ zv \infty ff,$$

omnibusque iſtis caſibus Locum quæſitum eſſe Hyperbolam, cjus determinatio ſive deſcriptio atque demonſtratio ex iis, quæ jam ante explicata ſunt, ſponte quoque profluunt.

Primo enim caſu, ſi in recta A B ſumatur A C ∞f, atque ex puncto C eductâ rectâ C D, quæ ipſi B E ſit æquidiſtans & æqualis priori A C, hoc eſt ∞f, per A & D recta linea ducatur: erit A centrum Hyperbolæ, cujus axis eſt in recta A D, & punctum D vertex, atque A B aſymptotos. ſive (ductâ rectâ D F ad A D perpendiculari ac in A B terminata) erit A D ſemi-latus tranſverſum, & ratio tranſverſi ad rectum, ut A D quadratum ad D F



quadratum. Si namque prædicta Hyperbole ſecare ſupponatur rectam B E in puncto E, erit ' rectangulum A B E ∞ quadrato ' ex A C vel C D. Quare cum A B ſit ∞x, B E ∞y, & A C ∞f: erit $xy \infty ff$. Quod primo caſu erat demonſtrandum. ' per 3 primi hujus.

Secundo caſu, cùm nempe æquatio eſt $zx \infty ff$, oportet ut z juxta Regulam ſit aſſumpta pro y 8 notâ quâdam quantitate. Eſto

 itaque

[332] Laat nu eens z aangenomen zijn in plaats van $y \pm c$. Men moet dan dus om de hyperbool te beschrijven, door het punt A het lijnstuk AG trekken, evenwijdig aan BE en gelijk aan c, waarbij natuurlijk het punt G, of aan de ene kant of aan de andere kant van de lijn AB genomen wordt, naargelang de grootheid c voorzien is van het plusteken of het minteken. Wanneer dan verder GH getrokken is, evenwijdig aan AB, dan moet de hyperbool beschreven worden met middelpunt G en asymptoot GH, waarbij de rest van de constructie verloopt zoals hierboven, met de noodzakelijke wijzigingen.
Wanneer deze kromme nu volgens onderstelling de rechte BE snijdt in het punt E, dan zal de rechthoek $GHBE$ [4.50] of GHE gelijk zijn aan f^2. Omdat geldt $GH = x$ en HE (of HBE) = $y \mp c$, dat is z, (de tekst vermeldt ten onrechte ±, vert.), zal de rechthoek GHE of $GHBE$ gelijk zijn aan zx en dus $zx = f^2$.
Dit was in het tweede geval te bewijzen .

In het derde geval, indien namelijk de vergelijking luidt $yv = f^2$, mag v ook alleen maar genomen zijn in plaats van x vermeerderd of verminderd met een of andere bekende grootheid, zeg in plaats van $x \pm h$.
Om nu de gewenste plaats te vinden, moet men op de rechte AB of op het verlengde daarvan AI nemen, gelijk aan h. Verder moet men met middelpunt I en asymptoot IAB [4.51] of IB een hyperbool beschrijven op dezelfde wijze als hierboven, maar met de noodzakelijke wijzigingen. Indien we veronderstellen dat deze de rechte BE snijdt in E, dan zal de rechthoek $IABE$ [4.52] of IBE gelijk zijn aan f^2. Omdat IAB (of IB) gelijk is aan $x \pm h$, dus aan v, en $BE = y$, zal gelden $yv = f^2$.
Dit was als derde geval te bewijzen.
In het vierde geval tenslotte, indien namelijk de vergelijking luidt $zv = f^2$, zal z genomen zijn in plaats van $y \pm c$ en v in plaats van $x \pm h$. Daarom moet nu door het genoemde punt I het lijnstuk IK getrokken worden evenwijdig aan BE en gelijk aan c. Vervolgens moet men eerst KH trekken evenwijdig aan AB en dan een hyperbool beschrijven met middelpunt K en asymptoot KGH of KH en de overige constructies uitvoeren zoals in het eerste geval, met de noodzakelijke wijzigingen. We veronderstellen dat deze de rechte BE in E snijdt; dan zal de rechthoek $KGHE$ [4.53] of KHE evenals ook $KGHBE$ [4.54] of $KHBE$ gelijk zijn aan f^2.
Aangezien HBE of HE gelijk is aan $y \pm c$, dus aan z, en KGH of KH gelijk is aan $x \pm h$, dus aan v, zal gelden $zv = f^2$. Dit was als vierde geval te bewijzen.

Dit is nu juist alles wat voor beschouwing in aanmerking komt met betrekking tot het vinden van plaatsen in het geval waarin deze op een hyperbool liggen.

In het andere algemene geval echter van de formules die vallen onder nummer 3 [4.55], wanneer namelijk de term waarin x^2 of v^2 voorkomt, voorzien is van het minteken en de gezochte plaats dus een ellips of cirkelomtrek blijkt te zijn, kan een breuk, indien itaque assumpta pro *y* 8 *c*, atque idcirco ad describendam Hyperbolam ducatur per punctum A recta A G ipsi B E parallela, ac ∞ *c*: sumpto nimirum puncto G vel ab hac vel ab illa parte lineæ A B, prout *c* quantitas signo + vel — fuerit affecta; ductâque porrò G H ipsi A B parallelâ, centro G, Asymptoto G H, cæterisque, ut supra, mutatis mutandis, Hyperbole describatur. Hæc igitur si secare supponatur rectam B E in puncto E, erit rectangulum G H B E vel G H E ∞ *ff*. Unde cum sit G H ∞ *x*, & H E vel H B E ∞ *y* 8 *c*, id est, *z*: erit G H E vel G H B E rectangulum ∞ *zx*, ac propterea *zx* ∞ *ff*. Quod 2^do^ casu demonstrandum erat.

Tertio casu, nempe si æquatio sit *yv* ∞ *ff*: *v* quoque tantùm pro *x* 8 notâ quâdam quantitate sumpta sit oportet, veluti pro *x* 8 *h*. Ideoque ad inventionem Loci quæsiti, in recta A B vel in ipsâ productâ sumenda est A I ∞ *h*, ac porrò centro I, atque Asymptoto I A B vel I B, cæterisque, ut supra, mutatis mutandis, describenda est Hyperbola, quæ si rectam B E secare supponatur in E: erit rectangulum I A B E vel I B E ∞ *ff*. Quare cum I A B vel I B sit ∞ *x* 8 *h*, hoc est, *v*, & B E ∞ *y*: erit *yv* ∞ *ff*. Quod 3^tio^ casu demonstrandum erat.

Denique quarto casu, si nempe æquatio sit *zv* ∞ *ff*: erit *z* assumpta pro *y* 8 *c*, & *v* pro *x* 8 *h*. Ideoque per prædictum punctum I ducenda est I K ipsi B E æquidistans & ∞ *c*; ductâque K H ipsi A B parallelâ, centro K, atque Asymptoto K G H vel K H, cæterisque, ut casu 1^mo^, mutatis mutandis Hyperbole describenda est, quæ si secare supponatur rectam B E in E: erit rectangulum K G H E vel K H E, ut & K G H B E vel K H B E ∞ *ff*. Hinc cum H B E vel H E sit ∞ *y* 8 *c*, id est, *z*, & K G H vel K H ∞ *x* 8 *h*, hoc est, *v*; erit *zv* ∞ *ff*. Quod 4^to^ casu demonstrandum erat.

Atque hæc quidem omnia sunt, quæ circa inventionem Locorum eo casu, quo iidem sunt in linea Hyperbolica, consideranda veniunt.

Altero autem casu generali formularum sub N^ro^ 3. comprehensarum, cùm nempe terminus, in quo invenitur *xx* vel *vv* signo — sit affectus, ac proinde Locus quæsitus vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit, si in æquatione fractio reperiatur, rejici quoque illa poterit majoris perspicuitatis gratiâ in terminum *yy* vel *zz*. Quo facto primò, remanente utrâque quantitate inco-

[332, vervolg]
deze in de vergelijking voorkomt, ook hier omwille van grotere duidelijkheid ondergebracht worden bij de term y^2 of z^2.

Het eerste geval waarin de plaats een ellips of een cirkelomtrek is.

[333] Indien we de beide onbekende grootheden, waarvan oorspronkelijk is uitgegaan, aanhouden, dan zal de vergelijking allereerst de volgende gedaante aannemen:

$$\frac{ly^2}{g} = f^2 - x^2.$$

In dit geval zal, zoals in de volgende figuur, de middellijn van de te beschrijven ellips liggen op de rechte AB, die onbegrensd is aangenomen als x, en wel zo dat de op deze middellijn geordend aangebrachte rechten hiermee hoeken maken die gelijk zijn aan de gegeven of aangenomen hoek ABE, het middelpunt ligt in het punt A en de halve dwarse zijde gelijk is aan f die op de genoemde middellijn weergegeven wordt door het lijnstuk AC of AF; de verhouding van deze dwarse zijde tot de rechte zijde zal zijn als l tot g.
Indien we immers aannemen dat de genoemde ellips beschreven is, gaande door de punten C en F en dat deze de aangebrachte rechte BE snijdt in het punt E, dan zal gelden $FB = f + x$ en $BC = f - x$, dus is de rechthoek FBC gelijk aan $f^2 - x^2$.
Maar omdat op grond van de aard van een ellips, bij gelijkheid van de rechte en dwarse zijde, de genoemde rechthoek FBC[1] [4.56] gelijk is aan het vierkant op BE, dat is y^2, zal in dit geval dus ook gelden $y^2 = f^2 - x^2$.
Gemakkelijk blijkt ook dat indien, onder dezelfde veronderstellingen, BE ook nog loodrecht zou staan op de rechte FC, hetgeen betekent dat de hoek die de geordend aangebrachte rechten met de middellijn maken recht is, de genoemde kromme de omtrek van een cirkel zou zijn [3.5].
Verder geldt echter het volgende: indien de dwarse zijde en de rechte zijde ongelijk zijn

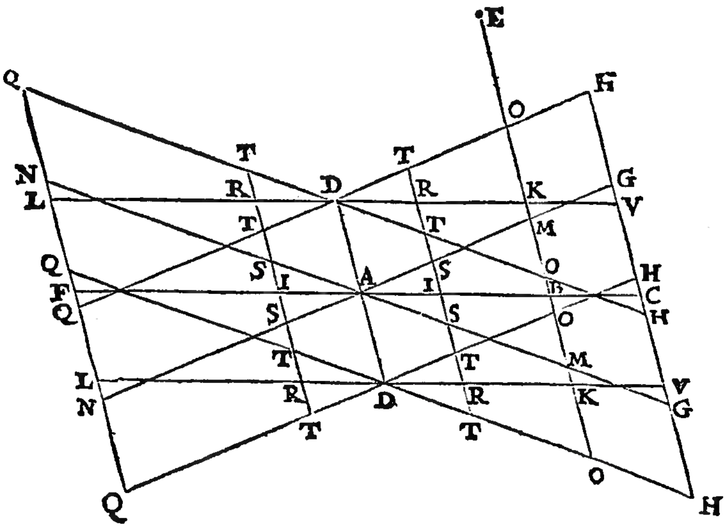
[1] prop. 13, Lib. I, blz. [205].

incognitâ ab initio conceptâ, ſequenti formulâ ſe exhibebit æquatio $\frac{lyy}{g} \propto ff - xx$: eritque, ut in ſequenti figura, deſcribendæ Ellipſeos diameter in recta A B, quæ pro x indeterminatè eſt concepta, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ cum ea angulos faciant, dato vel aſſumpto angulo A B E æquales; ac centrum in puncto A, & ſemi-latus tranſverſum $\propto f$. id quod in dicta diametro per lineam A C vel A F exprimatur, eritque ratio ejuſdem tranſverſi lateris ad rectum, ut l ad g.

Caſus 1mus, cùm Locus vel Ellipſis vel Circuli circumferentia exiſtit.

Si enim deſcripta intelligatur prædicta Ellipſis, tranſiens per puncta C & F, ſecansque applicatam B E in puncto E: erit F B $\propto f + x$, & B C $\propto f - x$: ideoque rectangulum F B C $\propto ff - xx$. At cum ex natura Ellipſeos, lateribus recto tranſverſoque æqualibus, prædictum rectangulum F B C [1] ſit $\propto$ quadrato ex B E, hoc eſt, yy: erit quoque proinde eo caſu $yy \propto ff - xx$. Et facilè

[1] *per 13 primi huius.*



apparet, ſi, iiſdem poſitis, B E ſuper rectam F C foret quoque perpendicularis, hoc eſt, ut angulus quem ordinatim applicatæ faciunt ad diametrum ſit rectus, prædictam curvam fore Circuli circumferentiam.

Cum autem porrò, lateribus tranſverſo rectoque inæqualibus

 atque

[334] en in de verhouding staan van l tot g, dan is de verhouding van de rechthoek FBC tot het vierkant op BE dezelfde[1] als die van de dwarse zijde tot de rechte zijde, dus als l tot g. Daarom is het uit het voorgaande duidelijk dat $f^2 - x^2$ staat tot y^2, zoals l staat tot g, oftewel dat $\frac{ly^2}{g} = f^2 - x^2$. Dit was in dit geval te bewijzen.

Het tweede geval waarin de plaats een ellips of een cirkelomtrek is.

Indien echter van de onbekende grootheden die oorspronkelijk zijn aangenomen, één uit de vergelijking is weggenomen en een andere volgens de Regel in plaats daarvan is aangenomen en de vergelijking luidt

$$\frac{lz^2}{g} = f^2 - x^2,$$

dan zal z aangenomen zijn in plaats van

$$y \pm c, \text{ of van } y \pm \frac{bx}{a} \text{ of van } y \pm c \pm \frac{bx}{a}.$$

§1. In het eerste geval nu, waarin z aangenomen is in plaats van $y \pm c$, moet men door het punt A het lijnstuk AD trekken, evenwijdig aan BE en gelijk aan c, zó dat het genoemde punt D valt aan dezelfde kant van de lijn AB als de gegeven of aangenomen hoek ABE, indien z aangenomen is in plaats van $y - c$, maar zó dat dit punt D aan de andere kant van de lijn AB ligt indien daarentegen z is aangenomen in plaats van $y + c$.
Vervolgens moet men eerst door D de rechte DK trekken, evenwijdig aan AB die (DK, vert.) de rechte BE, zonodig na verlenging in de richting van B, snijdt in K. De middellijn van de gezochte ellips zal dan liggen op de rechte DK en de daarop geordend aangebrachte rechten maken daarmee hoeken die gelijk zijn aan de gegeven of aangenomen hoek ABE of DKE. Het punt D zal het middelpunt zijn en de halve dwarse zijde zal gelijk zijn aan f, die op de genoemde middellijnen weergegeven zal worden door de lijnstukken DV en DL; ook zal de verhouding van de dwarse tot de rechte zijde zijn als l tot g [4.57].
Indien we immers aannemen dat de genoemde ellips beschreven is, gaande door de punten L en V en dat deze volgens onderstelling de rechte BE, die geordend is aangebracht op de genoemde middellijn, snijdt in het punt E, dan geldt $KBE = y + c$ en $KE = y - c$ en dus is deze KBE of KE juist die grootheid, die als z is aangenomen [4.58].
Aangezien $LK = f + x$ en $KV = f - x$, zal de rechthoek LKV gelijk zijn aan $f^2 - x^2$.
Nu geldt dat de verhouding van de genoemde rechthoek LKV tot het vierkant op KBE of op KE, dat wil zeggen tot z^2, dezelfde is als die van de dwarse zijde tot de rechte zijde, dat wil zeggen als l tot g. Daarom zal $f^2 - x^2$ staan tot z^2 als l tot g, zodat er zal gelden

[1] prop. 13, Lib. I, blz. [205].

[1] per 13 primi hujus.

atque in ratione ut l ad g, eadem sit ratio [1] rectanguli FBC ad BE quadratum, quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, ut l ad g: ex prædictis palàm est fore ut l ad g, ita $ff - xx$ ad yy, hoc est, esse $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$. Quod eo casu demonstrandum erat.

Casus 2dus, cùm Locus est vel Ellipsis vel Circuli circumferentia.

At si, quantitatum incognitarum primò conceptarum unâ ex æquatione sublatâ aliâque in ejusdem locum juxta Regulam assumptâ, æquatio sit $\frac{lzz}{g} \infty ff - xx$: aut z assumpta erit pro $y \; 8 \; c$, aut pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a}$, aut pro $y \; 8 \; c \; 8 \; \frac{bx}{a}$.

§. 1. Et primùm quidem, si z assumpta fuerit pro $y \; 8 \; c$, ducenda est per punctum A recta AD ipsi BE parallela ác ∞c, ita ut, si z fuerit assumpta pro $y - c$, prædictum punctum D cadat ab eadem parte lineæ AB, quâ datus vel conceptus est angulus ABE; sin contra z fuerit assumpta pro $y + c$, idem illud punctum D ab altera parte lineæ AB reperiatur. Deinde ductâ per D rectâ DK ipsi AB parallelâ, quæ secet rectam BE, productam versùs B, si opùs fuerit, in puncto K, erit quæsitæ Ellipseos diameter in recta DK, ad quam ordinatim applicatæ cum ea angulos faciant, dato vel assumpto angulo ABE seu DKE æquales. Punctum autem D centrum erit, & semi-latus transversum ∞f. quod in dictis diametris per lineas DV & DL exprimatur, eritque ratio transversi lateris ad rectum, ut l ad g.

Si enim prædicta Ellipsis descripta intelligatur transiens per puncta L & V, quæ supponatur secare rectam BE, ad prædictam diametrum ordinatim applicatam, in puncto E: erit KBE $\infty y + c$, & KE $\infty y - c$, ideoque eadem KBE vel KE ea ipsa, quæ pro z assumpta est. Cumque LK sit $\infty f + x$, & KV $\infty f - x$: erit rectangulum LKV $\infty ff - xx$. At cum eadem sit ratio dicti rectanguli LKV ad quadratum ex KBE vel KE, hoc est, ad zz, quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, ut l ad g: erit ut l ad g, ita $ff - xx$ ad zz, hoc est, erit $\frac{lzz}{g} \infty ff - xx$. Quod quidem, si l sit ∞g, idem est ac $zz \infty ff - xx$. Atque hîc iterum facilè apparet, quòd, existente angulo DKBE vel DKE recto, & $l \infty g$, hoc est, rectangulo LKV ∞ KE quadrato, prædicta curva Circulus sit futura.

§. 2 At verò, si z assumpta fuerit pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a}$, sumpto in linea BE,

pro-

[334, vervolg]

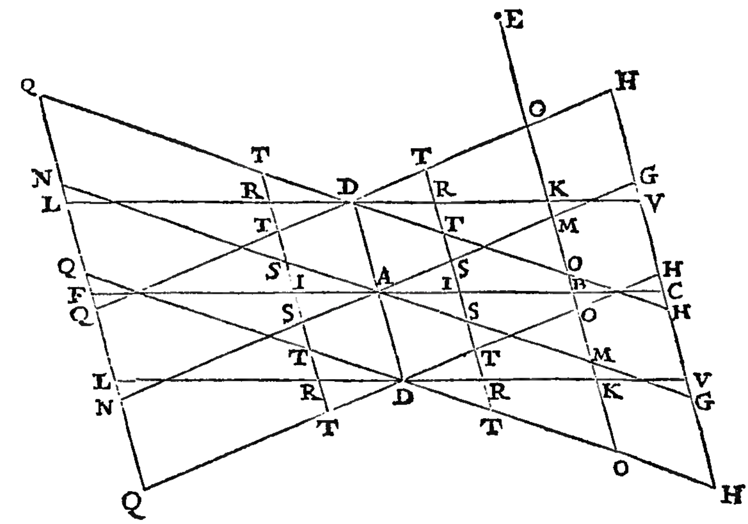
$$\frac{lz^2}{g} = f^2 - x^2. \quad [4.59]$$

Indien $l = g$, dan is dit hetzelfde als $z^2 = f^2 - x^2$.
Ook hier blijkt wederom gemakkelijk dat, wanneer de hoek *DKBE* of *DKE* recht is en $l = g$, hetgeen betekent dat de rechthoek *LKV* gelijk is aan het vierkant op *KE*, de genoemde kromme een cirkel zal zijn [3.5].

§2. Indien echter z is aangenomen in plaats van $y \pm \frac{bx}{a}$, dan moet men

[335] eerst op de rechte *BE*, zonodig verlengd in de richting van *B*, een punt *M* nemen, zó dat *AB* staat tot *BM* zoals a staat tot b, dus zó dat $BM = \frac{bx}{a}$ (dit punt *M* nu moet aan dezelfde kant van de lijn *AB* genomen worden als de gegeven of aangenomen hoek *ABE*, indien z aangenomen is in plaats van $y - \frac{bx}{a}$, maar het moet aan andere kant van de lijn *AB* genomen worden indien z daarentegen genomen is in plaats van $y + \frac{bx}{a}$). Vervolgens moet men door de punten *A* en *M* de rechte *NAMG* trekken die de rechten *HCH* en *QFQ* snijdt in de punten *G* en *N* (deze rechten *HCH* en *QFQ* zijn door de genoemde punten *C* en *F* evenwijdig aan *BE* getrokken).
Hierdoor zal de middellijn van de gezochte ellips liggen op de rechte *NG* en wel zó dat de rechten die op deze middellijn geordend zijn aangebracht, daarmee hoeken maken die gelijk zijn aan de hoek *AME* of *AMBE*.
Verder zal het middelpunt daarvan liggen in het punt *A* en de halve dwarse zijde zal *AN* of *AG* zijn (indien we veronderstellen dat de verhouding van *AB* tot *AM* is als a tot e, dan zullen deze *AN* of *AG* gelijk zijn aan $\frac{ef}{a}$, aangezien *AC*, dat is f, staat tot *AG* zoals *AB* staat tot *AM*, oftewel zoals a staat tot e).
Tenslotte zal de verhouding van de dwarse zijde tot de rechte zijde zijn als e^2l tot a^2g,

productâ versùs B, ſi opùs fuerit, puncto M; ita ut A B ad B M ſit, ſicut a ad b, hoc eſt, ut B M ſit $\infty \frac{bx}{a}$, (quod quidem punctum M, ſi z aſſumpta fuerit pro $y - \frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ A B, quâ datus vel conceptus eſt angulus A B E, ſumi debet; ſin contra, z pro $y + \frac{bx}{a}$ aſſumpta fuerit, ab altera ejuſdem lineæ A B parte ſumendum eſt) oportet per puncta A & M rectam lineam ducere N A M G, ſecantem rectam H C H, atque occurrentem ipſi Q F Q, quæ per prædicta puncta C & F ipſi B E ductæ ſunt æquidiſtantes, in G & N. Quo facto, erit quæſitæ Ellipſeos diameter



in recta N G, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ cum ea angulos faciant, angulo A M E vel A M B E æquales. Porrò centrum ejuſdem erit in puncto A, & ſemi-latus tranſverſum erit recta A N vel A G. (quæ quidem A N vel A G, ſi ratio A B ad A M ſupponatur ut a ad e, æquabitur $\frac{ef}{a}$: cum ſit ut A B ad A M, ſive ut a ad e, ita A C, hoc eſt, f, ad A G.) Denique ratio tranſverſi lateris ad rectum erit ut eel ad aag, id eſt, ſi l ſit

∞g,

[336] dus indien $l = g$, of, wat hetzelfde is, indien de term z^2 geen breuk als coëfficiënt heeft, dan is deze verhouding als e^2 tot a^2, dat is zoals het vierkant op AM tot het vierkant op AB.
Immers [4.60] indien we aannemen dat de genoemde ellips beschreven is, gaande door N en G en indien we veronderstellen dat deze de rechte ME of MBE (die geordend is aangebracht op de genoemde middellijn), snijdt in het punt E, dan geldt

$$ME = y - \frac{bx}{a} \text{ en } MBE = y + \frac{bx}{a}$$

en dit is dus juist die grootheid die als z is aangenomen.
Aangezien $AM = \frac{ex}{a}$, zal gelden $NM = \frac{ef}{a} + \frac{ex}{a}$ en $MG = \frac{ef}{a} - \frac{ex}{a}$, dus geldt dat de rechthoek NMG gelijk is aan $\frac{e^2 f^2}{a^2} - \frac{e^2 x^2}{a^2}$.
Maar omdat de verhouding van de genoemde rechthoek NMG tot het vierkant op MBE of ME dezelfde is als die van de dwarse zijde tot de rechte zijde, dus dezelfde als die van $e^2 l$ tot $a^2 g$, zal ook $\frac{e^2 f^2 - e^2 x^2}{a^2}$ staan tot z^2 zoals $e^2 l$ staat tot $a^2 g$ en geldt dus

$$e^2 l z^2 = e^2 g f^2 - e^2 g x^2,$$

zodat, na deling door $e^2 g$ geldt

$$\frac{l z^2}{g} = f^2 - x^2$$

of, als men stelt $l = g$, $z^2 = f^2 - x^2$.
Dus blijkt uit het voorgaande wederom dat – indien de hoek $AMBE$ of AME recht is en tegelijkertijd $e^2 l = a^2 g$, hetgeen betekent dat de rechthoek NMG gelijk is aan het vierkant op ME of MBE – de genoemde kromme een cirkel zal zijn met middelpunt A en halve middellijn AN of AG.

§3. Indien tenslotte, in het derde geval, z aangenomen is in plaats van $y \pm c \pm \frac{bx}{a}$, dan moet men eerst, zoals hierboven, het lijnstuk AD trekken gelijk aan c en DK evenwijdig aan AB, daarna moet men op de lijn KE een punt O nemen zódat DK staat tot KO zoals a staat tot b, oftewel zó dat $KO = \frac{bx}{a}$ en tenslotte moet men door de punten D en O de rechte $QDOH$ trekken die de genoemde HCH in H snijdt en de genoemde QFQ in Q (het blijkt echter uit datgene waarop reeds vaker gewezen is, dat het genoemde punt O aan dezelfde kant van de lijn DK gekozen moet worden als

336 ELEM. CVRVARVM

∞g, ſive, quod idem eſt, ſi termino zz nulla adhæreat fractio, ut ee ad aa, hoc eſt, ut A M quadratum ad quadratum A B.

Etenim ſi prædicta Ellipſis deſcripta intelligatur, tranſiens per N & G, ſupponaturque eandem ſecare rectam M E vel M B E, ad prædictam diametrum ordinatim applicatam in puncto E: erit eadem ME $\infty\, y - \frac{bx}{a}$, & M B E $\infty\, y + \frac{bx}{a}$, ac proinde ea ipſa, quæ pro z, aſſumpta eſt. Cumque A M ſit ∞ $\frac{ex}{a}$, erit N M $\infty\, \frac{ef}{a} + \frac{ex}{a}$, & M G $\infty\, \frac{ef}{a} - \frac{ex}{a}$: ideoque rectangulum N M G $\infty\, \frac{eeff}{aa} - \frac{eexx}{aa}$. At cum eadem ſit ratio dicti rectanguli N M G ad quadratum ex M B E vel M E, quæ eſt lateris tranſverſi ad rectum, hoc eſt, eadem quæ eel ad aag: erit quoque ut eel ad aag, ita $\frac{eeff - eexx}{aa}$ ad zz, ac proinde $eelzz$ $\infty\, eegff - eegxx$. id eſt, factâ diviſione per eeg, erit $\frac{lzz}{g}$ $\infty\, ff - xx$. ſive, poſitâ $l \infty g$, $zz \infty ff - xx$. Vnde ex ante dictis iterum apparet, quòd ſi angulus A M B E vel A M E rectus ſit, ac ſimul $eel \infty aag$, hoc eſt, rectangulum N M G ∞ quadrato ex M E vel M B E, prædictam curvam fore Circulum, cujus centrum ſit A, & ſemi-diameter A N vel A G.

§. 3. Denique ſi tertiò z aſſumpta ſit pro $y \;8\; c \;8\; \frac{bx}{a}$, ductâ, ut ſupra, A D ∞f, & D K ipſi A B parallelâ, ſumptoque in linea K E puncto O, ita ut D K ad K O ſit, ſicut a ad b, hoc eſt, ut K O ſit $\infty\, \frac{bx}{a}$: ducenda eſt per puncta D & O recta Q D O H, ſecans prædictam H C H in H, atque occurrens præfatæ Q F Q in Q. (conſtat autem ex iis, quæ jam ſæpiùs monita ſunt, ſi habeatur $-\frac{bx}{a}$, prædictum punctum O ab eadem parte lineæ D K, quâ datus vel aſſumptus eſt angulus D K E, ſumendum eſſe; at ſi habeatur $+\frac{bx}{a}$, illud ipſum ab altera ejuſdem lineæ parte ſumi debere.) Quo facto, erit deſcribendæ Ellipſeos diameter in prædicta recta Q D H, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ

[336, vervolg]

de gegeven of aangenomen hoek *DKE*, indien het gaat om $-\frac{bx}{a}$, maar dat dit punt aan de andere kant van deze zelfde lijn gekozen moet worden indien het gaat om $+\frac{bx}{a}$).

Hierdoor zal de middellijn van de te beschrijven ellips liggen op de genoemde rechte *QDH* en wel zo dat de op deze middellijn geordend aangebrachte rechten
[337] daarmee hoeken maken die gelijk zijn aan de hoek *DOKE* [4.61] of *DOE*.

Verder zal het middelpunt liggen in *D*, de halve dwarse zijde *DQ* of *DH* is gelijk aan *AN* oftewel $\frac{ef}{a}$ en de verhouding van de dwarse zijde tot de rechte zijde is als e^2l tot a^2g [4.62].

Immers indien we aannemen dat de gezochte ellips beschreven is, gaande door punten *Q* en *H* en indien we veronderstellen dat deze de rechte *OE* of *OKE* snijdt in het punt *E*, dan geldt

$$OKBE = y + c + \frac{bx}{a}, \quad OE = y - c - \frac{bx}{a},$$

$$OBE = y + c - \frac{bx}{a} \quad \text{en} \quad OKE = y - c + \frac{bx}{a}$$

en dus zullen deze genoemde lijnen dezelfde zijn als die, welke als z zijn aangenomen.

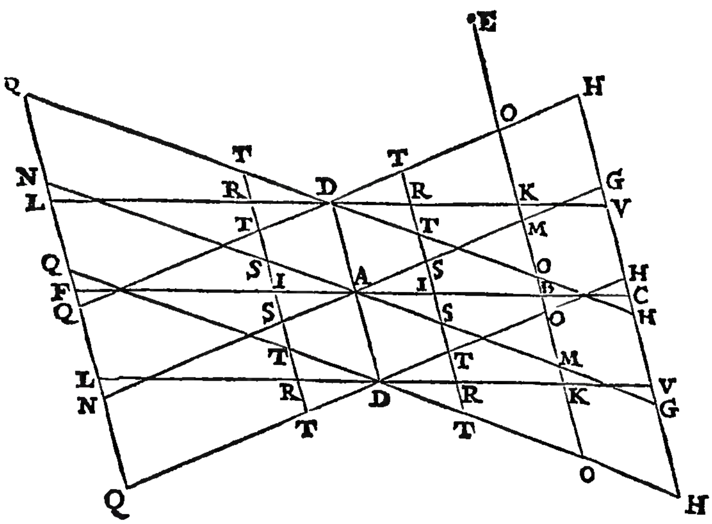
Aangezien verder

$$DO \text{ (of } AM) = \frac{ex}{a} \text{ en dus } QO = \frac{ef}{a} + \frac{ex}{a} \text{ en } OH = \frac{ef}{a} - \frac{ex}{a},$$

zal de rechthoek *QOH* gelijk zijn aan $\frac{e^2f^2 - e^2x^2}{a^2}$.

Maar omdat de verhouding van de genoemde rechthoek *QOH* plicatæ cum ea angulos faciant, angulo DOKE vel DOE æquales. Porrò centrum erit in D, & ſemi-latus tranſverſum DQ vel DH ∞ AN ſeu $\frac{ef}{a}$, ac ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut eel ad aag.

Si enim quæſita Ellipſis deſcripta intelligatur, tranſiens per puncta Q & H, eademque ſecare ſupponatur rectam OE vel OKE in puncto E: erit OKBE ∞ $y+c+\frac{bx}{a}$, OE ∞



$y-c-\frac{bx}{a}$, OBE ∞ $y+c-\frac{bx}{a}$, & OKE ∞ $y-c+\frac{bx}{a}$: ac proinde prænominatæ illæ lineæ eædem erunt, quæ pro z aſſumptæ ſunt. Cumque porrò ſit DO ſeu AM ∞ $\frac{ex}{a}$, ideoque QO ∞ $\frac{ef}{a}+\frac{ex}{a}$, & OH ∞ $\frac{ef}{a}-\frac{ex}{a}$: erit rectangulum QOH ∞ $\frac{eeff-eexx}{aa}$. At cum eadem ſit ratio dicti rectanguli QOH

[338] tot het vierkant op *OKBE* of *OE*, of tot het vierkant op *OBE* of *OKE*, dezelfde is als die van de dwarse zijde tot de rechte zijde, dus zoals e^2l tot a^2g, daarom zal ook $\dfrac{e^2f^2 - e^2x^2}{a^2}$ staan tot z^2 zoals e^2l tot a^2g en dus geldt

$$e^2lz^2 = e^2gf^2 - e^2gx^2$$

en, na alles gedeeld te hebben door e^2g,

$$\frac{lz^2}{g} = f^2 - x^2.$$

Als $l = g$, dan betekent dit: $z^2 = f^2 - x^2$.
Ook hier blijkt weer gemakkelijk dat, indien de hoeken *DOKBE*, *DOE*, *DOBE* of *DOKE* recht zouden zijn en tegelijkertijd $e^2l = a^2g$, de genoemde kromme een cirkel zou zijn.
Dit nu is alles wat over het genoemde geval, met de daarbij behorende onderscheiding in drie verschillende mogelijkheden, te bewijzen was.

Het derde geval waarin de plaats een ellips of een cirkelomtrek is.

Indien echter van de onbekende grootheden die oorspronkelijk zijn aangenomen, één uit de vergelijking is weggenomen en een andere volgens de Regel in plaats daarvan is aangenomen en de vergelijking luidt

$$\frac{ly^2}{g} = f^2 - v^2,$$

en v aangenomen is in plaats van x vermeerderd of verminderd met één of andere bekende grootheid, veronderstel dan dat v aangenomen is in plaats van $x \pm h$. In dit geval moet men op de lijn *AB* of *AF* een punt *I* nemen, zó dat $AI = h$ (dit punt *I* nu, moet gekozen worden vanaf *A* in de richting van *B* indien v aangenomen is in plaats van $x - h$, maar in het tegengestelde geval vanaf *A* in de richting van *F*).
Hierdoor zal dit punt *I* het middelpunt zijn van de te beschrijven ellips en voor al het overige geldt, met de noodzakelijke wijzigingen, wat hierboven vermeld is in het eerste geval. Dit betekent dat de middellijn zal liggen op de rechte *IB* en de halve dwarse middellijn gelijk is aan f en dat de verhouding van dwarse zijde tot de rechte zijde is als l tot g.

Het vierde geval waarin de plaats een ellips of een cirkelomtrek blijkt te zijn.

§1. Indien tenslotte elk van beide onbekende grootheden die oorspronkelijk zijn aangenomen, uit de vergelijking is weggenomen en andere volgens de Regel in plaats daarvan zijn aangenomen en de vergelijking luidt

$$\frac{lz^2}{g} = f^2 - v^2,$$

en eerst z is aangenomen in plaats van $y \pm c$, dan moet men aan beide kanten *IR* trekken, evenwijdig aan *BE* en gelijk aan c. Hierdoor zal dit punt *R* het middelpunt

338 ELEM. CURVARUM

ad quadratum ex OKBE vel OE, aut ad quadratum ex OBE vel OKE, quæ est transversi lateris ad rectum, hoc est, ut eel ad aag: erit quoque ut eel ad aag, ita $\frac{eeff-eexx}{aa}$ ad zz; ac propterea $eelzz \propto eegff - eegxx$, &, divisis omnibus per eeg, $\frac{lzz}{g} \propto ff - xx$. id est, si l sit $\propto g$, erit $zz \propto ff - xx$.

Atque hîc iterum facilè apparet, si angulus DOKBE, DOE, DOBE, vel DOKE rectus foret, & simul $eel \propto aag$, prædictam curvam fore Circulum. Quæ quidem omnia sunt, quæ supra dicto casu in triplici sua variatione demonstranda erant.

Casus 3^tius^, cùm Locus est vel Ellipsis vel Circuli circumferentia.

Si verò quantitatum incognitarum ab initio conceptarum alterâ ex æquatione sublatâ, aliâque ejusdem loco secundùm Regulam assumptâ, æquatio sit $\frac{lyy}{g} \propto ff - vv$, atque ipsa v assumpta sit pro x 8 notâ aliquâ quantitate; Sit v assumpta pro x 8 h, eritque eo casu in linea AB vel AF sumendum punctum I; ita ut AI sit $\propto h$. (quod quidem punctum I, si v assumpta fuerit pro $x - h$, ab A versùs B; sin contra ab A versùs F sumi debet.) Quo facto, erit idem punctum I centrum describendæ Ellipseos, &, mutatis mutandis, cætera omnia, ut supra, casu primo memoratum est. Hoc est, diameter erit in recta IB, ac semi-latus transversum erit $\propto f$, atque ratio transversi lateris ad rectum, ut l ad g.

Casus 4^tus^, cùm Locus vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit.

Si denique quantitatum incognitarum primùm conceptarum utrâque ex æquatione sublatâ, aliisque earundem loco juxta Regulam assumptis, æquatio sit $\frac{lzz}{g} \propto ff - vv$; atque z primò assumpta sit pro y 8 c, ducenda est utrinque IR, parallela ipsi BE, ac $\propto c$. Quo facto, erit idem punctum R centrum Elli-

§. 1. pseos, & diameter ejus in recta RK vel RL, eritque ejus semilatus transversum $\propto f$, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut l ad g. quemadmodum ea omnia Casu 2^do^ §. 1, mutatis mutandis, fusiùs explicata sunt.

§. 2. At si z assumpta fuerit pro y 8 $\frac{bx}{a}$, erit punctum S, ubi MA,

vel,

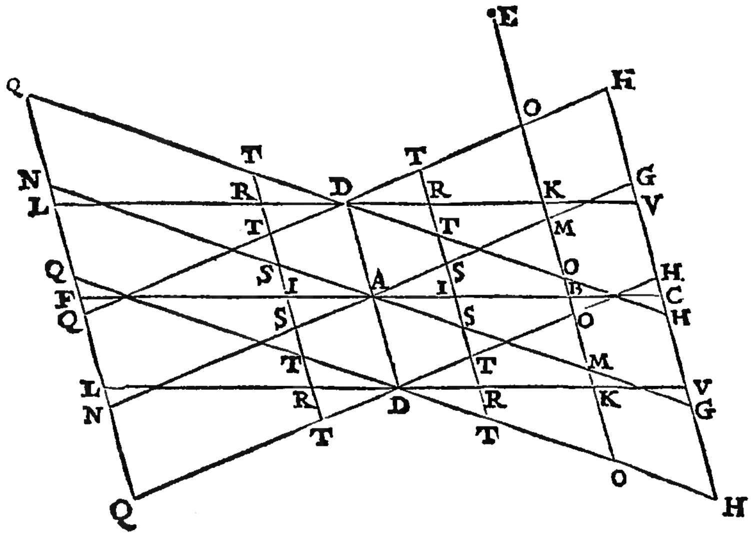
[338, vervolg]
zijn van de ellips en de middellijn daarvan zal liggen op de rechte *RK* of *RL* en zijn halve dwarse zijde zal f zijn en de verhouding van de dwarse zijde tot de rechte zijde zal zijn als l tot g. Alles verloopt dan verder, met de noodzakelijke wijzigingen, zoals in §1 van het tweede geval uitgebreider uiteengezet is (blz. [334], vert.).

§2. Indien echter z aangenomen is in plaats van $y \pm \frac{bx}{a}$, dan zal het punt S,

[339] waar *MA*, of de daaraan in richting toegevoegde [4.48], door de genoemde *IR*, zonodig na verlenging, gesneden wordt, het middelpunt van de ellips zijn; al het overige zal, met de noodzakelijke veranderingen, verlopen zoals hierboven in het tweede geval, §2, vermeld is. Zo zal de middellijn van de kegelsnede liggen op de rechte *SM* (en wel zó dat, waar daar gold $AM = \frac{ex}{a}$, hier *SM* gelijk zal zijn aan $\frac{ev}{a}$, immers *BI*, of v, staat tot *SM* zoals *BA* staat tot *AM*, dus zoals a staat tot e). Verder zal de halve dwarse zijde gelijk zijn aan $\frac{ef}{a}$ en de verhouding van de dwarse zijde tot de rechte zijde zal zijn zoals e^2l tot a^2g.

§3. Indien tenslotte z is aangenomen in plaats van $y \pm c \pm \frac{bx}{a}$, dan zal het punt T, waar *DO*, of de daaraan in richting toegevoegde [4.48], door de genoemde *IR*, zonodig na verlenging, gesneden wordt, het middelpunt zijn van de ellips; al het overige zal, met de noodzakelijke veranderingen, verlopen zoals in de vorige paragraaf en hierboven onder §3 van het tweede geval uitvoeriger uiteengezet is (blz. [336], vert.).

vel, quæ ipsi in directum adjungitur, per prædictam IR, productam, si opùs fuerit, intersecatur, centrum Ellipseos; & cætera omnia, mutatis mutandis, ut supra casu secundo §. 2. memoratum est. Nempe erit sectionis diameter in recta SM, (atque ut ibidem erat AM ꝏ $\frac{ex}{a}$, ita hîc SM erit $\frac{ev}{a}$: cum sit ut BA ad AM, hoc est, ut a ad e, ita BI, id est, v, ad SM:) eritque porrò semi-latus trans-



versum ꝏ $\frac{ef}{a}$, & ratio transversi lateris ad rectum, ut eel ad aag.

§. 3. Denique si z assumpta fuerit pro y 8 c 8 $\frac{bx}{a}$, erit punctum T, in quo DO, vel, quæ ipsi in directum adjungitur, per prædictam IR, productam, si opùs fuerit, intersecatur, centrum Ellipseos; & reliqua omnia, mutatis mutandis, ut paragrapho præcedenti ac supra casu secundo §. 3

[340] Zo zal de middellijn liggen op de rechte TO en de halve dwarse zijde gelijk zijn aan $\frac{ef}{a}$ en de verhouding van de dwarse zijde tot de rechte zijde zijn zoals e^2l tot a^2g.
Het bewijs van al deze zaken is duidelijk samengevat in het voorafgaande, terwijl alle termen en grootheden die hier voorkomen, overeenstemmen met de eerder behandelde, met slechts die uitzondering dat de grootheden die daar aangegeven werden met x, hier aangegeven worden met $x \pm h$, dat is met v.
Zo gold daar $AB = x$, hier geldt: $IB = v$; wat daar was $DK = x$, is hier $RK = v$; wat daar was $AM = \frac{ex}{a}$, is hier $SM = \frac{ev}{a}$ en wat daar was $DO = \frac{ex}{a}$ is hier $TO = \frac{ev}{a}$.
Dit nu is alles wat met betrekking tot het vinden van een plaats voor beschouwing in aanmerking komt, in het geval waar deze een ellips of een cirkelomtrek blijkt te zijn.

Zo hebben wij met een algemene Regel alle gevallen omvat van het vinden van plaatsen door middel van vergelijkingen waarin geen van beide onbekende grootheden met zichzelf vermenigvuldigd, noch ook in een onderling product, zodanig voorkomt dat er een derde macht ontstaat, maar waarin hooguit een kwadraat of een product van slechts twee factoren voorkomt.

EINDE

fuſiùs explicatum eſt. Nempe erit diameter in recta T O, & ſemi-latus tranſverſum $\infty \frac{ef}{a}$, ac ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut eel ad aag. Atque eorum omnium demonſtratio in præcedentibus explicitè eſt comprehenſa, cum termini & quantitates omnes hîc cum prioribus conveniant; excepto tantùm, quòd quæ ibidem deſignabantur per x hîc deſignentur per $x \mho b$, hoc eſt, v. Ita enim quòd ibi erat A B $\infty\ x$, hîc eſt I B $\infty\ v$; quod ibi erat D K $\infty\ x$, hîc eſt R K $\infty\ v$; quod ibi erat A M $\infty \frac{ex}{a}$, hîc eſt S M $\infty \frac{ev}{a}$; & quod ibi erat D O $\infty \frac{ex}{a}$, hic eſt T O $\infty \frac{ev}{a}$.

Quæ quidem omnia ſunt, quæ circa inventionem Loci illo caſu, quo idem vel Ellipſis vel Circuli circumferentia exiſtit, conſideranda veniunt.

Atque ita generali Regulâ caſus omnes inveniendi Loca per æquationes, in quibus neutra quantitatum incognitarum in ſe ducta nec factum ſub iiſdem ad tres dimenſiones aſcendit, ſed vel quadratum vel planum non excedit, complexi ſumus.

F I N I S.

4

Aantekeningen bij de vertaling

Hoofdstuk I

[1.1] Bedoeld wordt de vergelijking die de relatie bepaalt tussen de abscis (x) en de ordinaat (y) van een willekeurig punt op de kromme (de plaats). Overigens doet deze aanhef denken aan de openingszin van de *Géométrie* van Descartes: *Tous les Problesmes de Geometrie se peuvent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.*

[1.2] Met de *onbekende en onbepaalde lijnstukken* worden de abscis en de ordinaat van een willekeurig punt op de te bestuderen kromme bedoeld. Hiermee wordt gerekend alsof zij bekend zouden zijn en zo komt men tot een vergelijking; dit is typisch voor de analytische methode (zie Inleiding).
Jan de Witt gebruikt bijna letterlijk de formulering van Pappus (*Ἀνάλυομενος*, vii): *Analyse is een methode waarbij men datgene wat gezocht wordt, aanneemt als bekend en uitgaande daarvan, via een keten van logische gevolgtrekkingen, uitkomt op een erkende waarheid.*

[1.3] Met vlakke plaatsen worden weer bedoeld rechte lijnen en cirkels; met ruimtelijke plaatsen worden de kegelsneden parabool, hyperbool en ellips (geen cirkel) bedoeld. Zie ook aantekening [1.20] behorende bij Liber Primus (blz. [219] en [220]).

[1.4] Voor de begrippen *determinatio* (bepaling), *descriptio* (beschrijving) en *demonstratio* (bewijs) zie Inleiding en Samenvatting.

[1.5] Aangezien het gaat om louter positieve grootheden, wordt het geval $y = -\frac{bx}{a} - c$ niet aan de orde gesteld.

[1.6] De grootheden x en y zijn ten duidelijkste lijnstukken. Wanneer Jan de Witt schrijft dat x zich *volgens de onderstelling vanaf dit vaste en onveranderlijke beginpunt onbeperkt uitstrekt langs een rechte lijn die in ligging is gegeven (ex certo et immutabili illo initio in linea recta positione data intelligatur indefinite extendi)*, dan wordt bedoeld dat het gaat om een eindig lijnstuk waarvan de lengte willekeurig groot gekozen kan worden, maar het blijft gaan om eindige lijnstukken en niet om aan één zijde onbegrensde halve rechten. In deze zin moet men de steeds weerkerende zinsnede *dat deze x zich langs de recht AB onbeperkt uitstrekt*, lezen.

[1.7] *Immutabile* behoort bij *initium* en niet bij *punctum A*. Dit blijkt uit de regels 14 en 15 van boven op blz.[244]: *ut initium unius, verbi gratia, ipsius x, certum sit et immutabile* en uit regel 4 van onderen op blz. [267], waar we lezen: *Sit initium immutabile ipsius x punctum A.*
Overigens kan men hierbij denken aan de fluxietheorie van Aristoteles waarin deze dacht een lijn te zijn beschreven als de baan van een punt (*Physica* **262**).

[1.8] Hier, zoals op zoveel plaatsen, geeft een letter (i.c. C) geen vast, maar een beweeglijk punt aan.

[1.9] Hier haalt Jan de Witt *Elementa* VI,16 aan, waaruit blijkt hoe meetkundig hij dacht. Men leest daar namelijk: wanneer vier lijnstukken een evenredigheid vormen, dan is de *rechthoek* gevormd door de buitenste (termen) gelijk aan de *rechthoek* gevormd door de binnenste.

[1.10] De werkwijze die hier gevolgd wordt, is exemplarisch. Jan de Witt gaat uit van een vergelijking, hier $y = \frac{bx}{a}$, en construeert met behulp van de hierin optredende parameters a en b een kromme, hier een rechte, (*descriptio*), neemt daarop een willekeurig punt en toont aan dat abscis en ordinaat van dit punt voldoen aan de vergelijking waarvan hij uitging (*demonstratio*). Hij verzuimt echter aan te tonen dat elk punt waarvan abscis en ordinaat aan deze vergelijking voldoen ook op deze kromme ligt. Hierdoor mist hij later ook de tweede tak van een hyperbool.

[1.11] De tekst geeft abusievelijk $ED = a + c$.

Hoofdstuk II

[2.1] Dit slaat op de *Regula Universalis* op blz. [255].

[2.2] Deze rechte zijde is in de figuur op blz. [249] en in de daarop volgende gevallen aangegeven als het lijnstuk dat aan de parabool raakt in de top. Dit accentueert de meetkundige zienswijze, want nu kan men bijvoorbeeld in laatstgenoemde figuur de mededeling '$y^2 = ax$', zien als $DE^2 = FA.AE$, dus als *de oppervlakte van het vierkant op DE is gelijk aan de oppervlakte van de rechthoek met zijden FA en AE.*
Voor het begrip 'rechte zijde' zie ook Liber Primus blz. [164] en de bijbehorende Appendix II, blz. 266.

[2.3] Op blz. [247] regel 14 v.b. gebruikt Jan de Witt de term *ad binos rectos complemento* in plaats van *supplemento*.

[2.4] Ook hier blijkt duidelijk dat Jan de Witt slechts dat deel van de kromme beschouwt waarop punten liggen met 'positieve' abscissen.

[2.5] De genoemde gevallen zijn die welke vermeld zijn op blz. [249]. In feite komt de genoemde methode neer op het 'afsplitsen van een kwadraat', Immers, indien bijv. voorkomt $x^2 \pm 2xy$, dat wil zeggen $x^2 \pm x.2y$, dan schrijft Jan de Witt de substitutie $z = x \pm y$ voor.

[2.6] Strikt genomen is het feit dat de vergelijking $z^2 = dx$ de gedaante heeft van de vergelijking $y^2 = dx$ in Stelling VII geen garantie dat het ook hier gaat om een parabool; dat hangt namelijk af van de wijze waarop z met x en y samenhangt. Als bijv. $z = y^2$, dan gaat het natuurlijk mis.

[2.7] Het is duidelijk dat genoemde d geen parameter is van de bedoelde parabool met vergelijking $z^2 = dx$. Het gaat namelijk om de parabool met G als top, GC als middellijn en gaande door het punt D.
Dit wordt op blz. [259] uiteengezet; we vatten deze redenering hier als volgt samen omdat deze vaak terugkeert in dit boek.
Indien men de bij deze middellijn GC behorende parameter p noemt, dan geldt (zie de figuur op blz. [258])

$$DC^2 = p\, GC.$$

Stelt men $GB : BC : CG = a : b : e$,

dan geldt $GC = \frac{ex}{a}$ (aangezien $GB=x$)

en dus $DC^2 = p\,\frac{ex}{a}$.

Ook geldt $DC^2 = dx$,

dus $p = \frac{ad}{e}$.

Deze parameter p is in de figuur op blz. [258] voorgesteld door het lijnstuk GF. Het punt F wordt op blz. [259] (regel 9 v.b.) expliciet gedefinieerd.

[2.8] Ook hier blijkt weer dat Jan de Witt slechts die delen van krommen accepteert die liggen boven de abscis-as, dat wil zeggen boven de halve rechte door A (naar rechts gerekend).

[2.9] Op de gebruikelijke manier gaat Jan de Witt nu aantonen dat abscis en ordinaat van een willekeurig punt op de kromme die hij 'met voorbedachten rade' heeft geconstrueerd, voldoen aan de vergelijking waarvan hij uitging. Op de *descriptio* volgt dus ook nu de *demonstratio*.

[2.10] Jan de Witt spreekt, ietwat slordig maar begrijpelijk, over *de* middellijn daarvan.

[2.11] Het betreft immers de vergelijking $dy = v^2$ van blz. [260] regel 3 v.o.

[2.12] Het gaat om de figuur op blz. [261].

[2.13] Volgens blz. [262], regel 2 v. b. geldt $GC = \frac{ey}{a}$; volgens regel 16 v.b. is de rechte zijde FG gekozen als $\frac{ad}{e}$. Aangezien $DC = v$, geeft dit, op grond van $DC^2 = FG.GC$, als resultaat $dy = v^2$.

[2.14] Zie blz. [305].

[2.15] Zie ook aantekening [2.7]. De nu beschreven parabool is echter nog niet het eindresultaat; de term d^2 in de vergelijking moet nog verdisconteerd worden. Dit bereikt Jan de Witt door de top A te verschuiven langs BAG van A naar G, zó dat $z^2 = DB^2 = FG.GB = FG.AB + FG.GA$. We zagen al $FG.AB = \frac{2ab}{e}.\frac{ex}{2a} = bx$. Nu moet dus nog $FG.GA = d^2$, dus $\frac{2ab}{e}GA = d^2$ en dus $GA = \frac{d^2e}{2ab}$, zodat $AC = \frac{d^2}{b}$.

[2.16] Nu wordt A verschoven langs EAC van A naar C, zó dat $AC = \frac{d^2}{b}$. Het bewijs is duidelijk want $CA : GA = AE : AB = 2a : e$ (blz. [264], regel 5 v.o.); als nu $AC = \frac{d^2}{b}$, dan heeft GA de vereiste waarde $\frac{d^2}{b}.\frac{e}{2a} = \frac{d^2e}{2ab}$.

[2.17] Bedoeld is het geval waarin x en y verwisseld zijn.

[2.18] Stilzwijgend is ondersteld dat CD evenwijdig is aan AE.

[2.19] De redenering is als volgt (zie de figuur op blz. [266] voor de betekenis van de hier gebruikte letters): indien we de parameter, behorende bij de middellijn BKG, voorstellen door p $(= FG)$, dan geldt $BD^2 = FG.GB$, dus

$$v^2 = FG.\ GB, \text{ en dus } v^2 = p(BK + KG) = p(\frac{ey}{a} + KG).$$

Ook moet gelden

$$v^2 = by + \frac{c^2}{2},$$

dus $$by = p\frac{ey}{a}, \text{ en dus } p = \frac{ab}{e}$$

en $$p\,KG = \frac{c^2}{2},$$

zodat $$KG = \frac{c^2e}{2ab}$$

en $$GB = GK + KB = \frac{c^2e}{2ab} + \frac{ey}{a}.$$

Nu zijn dus van de beoogde parabool bekend: een middellijn met de bijbehorende parameter, de top daarop en de daaraan toegevoegde richting.

[2.20] *Determinare* en *describere* zijn hier synoniemen.

[2.21] Zie ook aantekening [1.7].

[2.22] Bedoeld is het geval waarin x en y verwisseld zijn.

[2.23] Zie de afbeelding op blz. [269]. Nu wordt de beoogde parabool vastgelegd (determinatio).

[2.24] De gedachtegang is als volgt (zie de figuur op blz. [270] voor de betekenis van de hier gebruikte letters): Jan de Witt zoekt een parabool behorende bij de vergelijking $x^2 - \frac{2bxy}{a} + \frac{b^2y^2}{a^2} + dy - c^2 = 0$, die hij herleid heeft tot de gedaante $v^2 = c^2 - dy$ en mikt daarbij op de parabool met middellijn GA, met als daaraan toegevoegde richting AE en met top G. Voor een willekeurig punt D daarop moet dan gelden $BD^2 = p.GB$, waarbij p $(= GF)$ de nog te bepalen parameter is.

Nu zijn C en G zo gekozen dat

$$AC : CG : GA = a : b : e \text{ en } AC = \frac{c^2}{d},$$

dus $$BD = HD - HB = x - \frac{by}{a} = v$$

en $$GB = GA - BA = \frac{c^2e}{ad} - \frac{ey}{a}.$$

Er geldt $BD^2 = GF.\ GB$, dat wil zeggen $v^2 = p\,\frac{e}{ad}(c^2 - dy)$.

Ook geldt $\qquad v^2 = c^2 - dy,$

zodat $\qquad \dfrac{pe}{ad} = 1$ en dus $p = \dfrac{ad}{e}$.

Deze p valt bij de *descriptio* op blz. [271], regel 6 en 7 v.b. min of meer uit de lucht (evenals de keuze van AC), maar bij de *demonstratio* blijkt alles (uiteraard) te kloppen.

[2.25] De redenering is analoog aan die in aantekening [2.24].

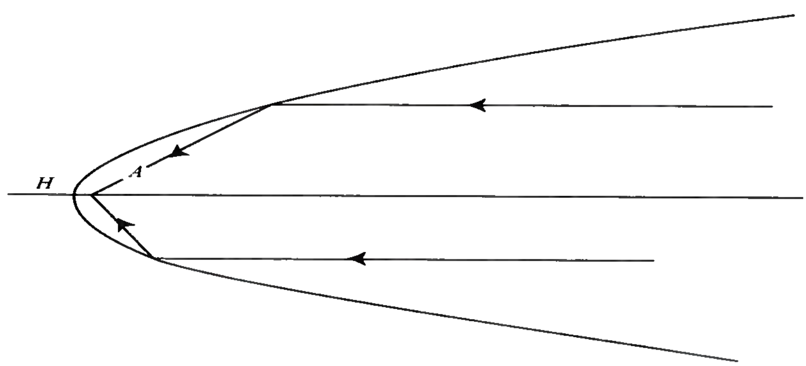
[2.26] Zie Caput IV, blz. [304].

[2.27] Uit de context blijkt duidelijk dat hier met '$y = a$' de absolute waarde van $y - a$ bedoeld wordt.

Cajori vermeldt in *A History of Mathematical Notations* (deel I, blz. 158 en 183) het voorkomen van deze notatie bij Viète (1540–1603) en bij Albert Girard (1595–1632). Viète spreekt over het '=' teken als over *minus incertus*. Girard zegt hierover *Touchant les lettres de l'Alphabet au lieux des nombres: soit A & aussi B deux grandeurs: ... leur difference est A = B (ou bien si A est majeur on dira que c'est A − B)* en gebruikt het '=' teken als *difference entre deux quantitez ou il se treuve*. De twee verticale streepjes die wij gebruiken voor het aangeven van de absolute waarde zijn in 1841 ingevoerd door Karl Weierstraß (1815–1897).

[2.28] Uit de berekeningen blijkt dat het gegeven punt A ligt op de as van de gevonden parabool, die het punt H als top heeft en wel zó dat de afstand AH het vierde deel is van de parameter van de betreffende parabool. "Daarom," zegt Jan de Witt, "is het punt A juist het punt dat focus of umbilicus genoemd wordt." Bij ons is dat het brandpunt. De term 'focus' is geïntroduceerd door Kepler in 1604.

Het begrip 'brandpunt' was al bekend in de Griekse oudheid. Het is merkwaardig dat Apollonius in zijn *Conica* wel de brandpunten van de hyperbool en de ellips noemt (zie ook de aantekeningen [3.26] en [3.42]), maar niet het brandpunt van de parabool. Naar de reden daarvan kan men slechts gissen.



FIGUUR 4.2.1

Volgens Toomer (zie bibliografie) zou het brandpunt van de parabool al circa 250 v.

C. genoemd zijn door Dositheus, een vriend van Archimedes, als het punt waardoor alle stralen evenwijdig aan de as van een parabool, passeren na terugkaatsing door de parabool. Diocles van Carystus, een tijdgenoot van Apollonius, geeft in zijn geschrift *Over brandspiegels* een correct meetkundig bewijs van de stelling dat het punt binnen de parabool, gelegen op de as daarvan en op een afstand tot de top gelijk aan het vierde deel van de parameter, de vereiste eigenschap van het brandpunt heeft. Dit geschrift is alleen bekend in een Arabische vertaling en zou de titel *περί πυρίων* gedragen hebben. Zie hiervoor het genoemde werk van Toomer, *Diocles on Burning Mirrors*.

[2.29] De as reikt slechts tot het punt H.

[2.30] In Liber Primus, gevolg 2 (en niet 1) op blz. [174], leidt Jan de Witt de stelling af....*dat willekeurige rechten die een parabool, waar dan ook, raken en de lijnen die vanuit het raakpunt geordend zijn aangebracht op een middellijn, ter weerszijden van de top gelijke stukken van de middellijn afsnijden en omgekeerd...*

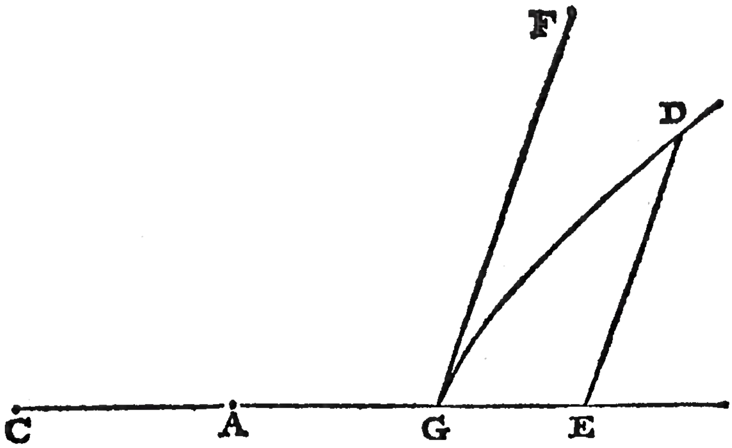
[2.31] Zelfs voor deze eenvoudige conclusie verwijst Jan de Witt naar de *Elementa* van Euclides (Boek I, stelling 5)!

Hoofdstuk III

[3.1] Hier wordt verwezen naar blz. [243], regel 1-5 v.o. waar we lezen:
Maar indien elk van beide [onbekende grootheden] *tot de tweede macht verheven is of de ene met de andere vermenigvuldigd in de vergelijking voorkomt.... dan zal de gezochte plaats òf een hyperbool òf een ellips zijn òf de omtrek van een cirkel.*
Zoals Jan de Witt kort daarvoor op blz. [243] heeft aangegeven, gaat het hierbij om vergelijkingen die tot de eenvoudigste gedaante zijn herleid; wij zouden zeggen 'in standaardgedaante gebracht'. Anders zou de bewering uiteraard onjuist zijn (zie ook zijn voorbeelden van een parabool op blz. [263] en [267]). Dit herhaalt hij ook hier op blz. [275].
In de tweede *Regula Universalis* (blz. [280]) beperkt hij zich bij voorbaat tot hyperbolen, ellipsen en cirkels.

[3.2] Deze gevallen I-IV worden op nagenoeg dezelfde wijze behandeld in Caput IV, maar dan als voorbereiding op de situaties waarin x en y vervangen zijn door lineaire combinaties van x en y.

[3.3] Indien $l = g$, dan luidt de vergelijking $y^2 = x^2 - f^2$ en Jan de Witt werkt nu naar die vergelijking toe door bij voorbaat de parameter GF gelijk aan de transversale middellijn CG te kiezen.
Bij de constructie van de hyperbool baseert hij zich op de constructievoorschriften van Liber I, Caput IV, blz. [231]-[235].
Van fundamenteel belang is hier, en op veel plaatsen elders in dit boek wanneer het over hyperbolen gaat, de Stelling IX, propositie 10 uit Liber I (blz. [196]).



FIGUUR 4.3.1

Daarom vatten we deze hier samen:
Wanneer we de transversale middellijn CG en de daaraan toegevoegde tweede middellijn aangeven met respectievelijk $2a$ en $2b$, dan geldt in de figuur op blz. [277] van Liber II (= Figuur 4.3.1) volgens de genoemde stelling:

$$DE^2 : CE.GE = 4b^2 : 4a^2.$$

De parameter p (=GF) is gedefinieerd door

$$2a : 2b = 2b : p,$$

zodat $$DE^2 : CE.GE = 4b^2 : 4a^2 = p : 2a = GF : CG\ .$$

In de situatie op blz. [276] (het eerste geval) kiest Jan de Witt met voorbedachten rade $CG = GF$, zodat

$$DE^2 = CE.CG.$$

Uit de constructie blijkt ook (nu is $a = f$ genomen)

$$DE = y;\ CE = AE + CA = x + f\,;\ GE = AE - AG = x - f$$

en dus voldoen de coördinaten van D aan

$$y^2 = x^2 - f^2.$$

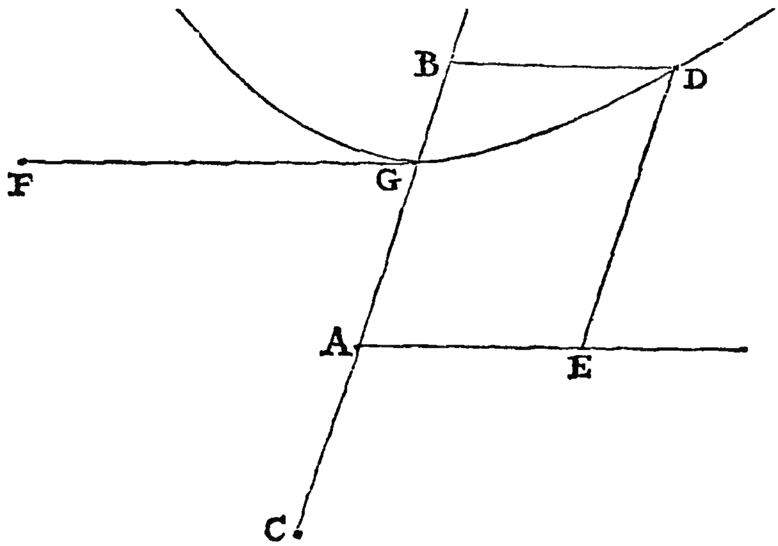
Indien $l \neq g$, dan kiest Jan de Witt GF en CG zodanig dat $GF : CG = g : l$, zodat

$$y^2 : (x^2 - f^2) = p : 2a = GF : CG = g : l$$

en dus $$\frac{ly^2}{g} = x^2 - f^2$$

en dit is het geval op blz. [277].

[3.4] Vergeleken met de vorige stelling gaat het slechts om verwisseling van x en y. Het betreft de figuur op blz. [278] (= Figuur 4.3.2).

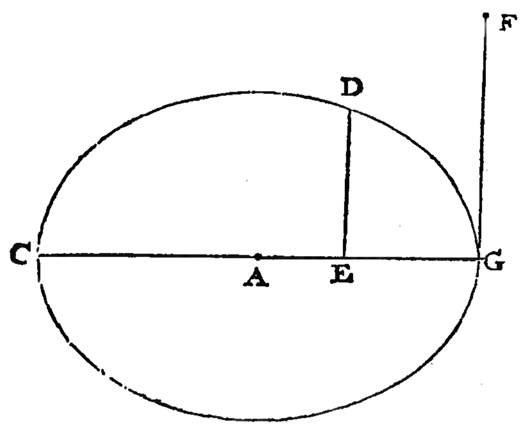


FIGUUR 4.3.2

[3.5] Van fundamenteel belang is hier en op veel plaatsen elders in dit boek, wanneer het over ellipsen gaat, Stelling XII, propositie 13 uit Liber I (blz. [205]).

Daarom vatten we deze hier samen:

Wanneer we de transversale middellijn en de daaraan toegevoegde tweede middellijn aangeven met respectievelijk $2a$ en $2b$, dan geldt in de figuur op blz. [279] (= Figuur 4.3.3; N.B. *DE* staat niet noodzakelijk loodrecht op *CG*) volgens de genoemde stelling:



FIGUUR 4.3.3

$$DE^2 : CE.GE = 4b^2 : 4a^2.$$

De parameter p $(=GF)$ is ook in dit geval gedefinieerd door

$$2a : 2b = 2b : p,$$

zodat $$DE^2 : CE.GE = 4b^2 : 4a^2 = p : 2a = GF : CG.$$

Uit de constructie blijkt ook

$$DE = y\,,\ CE = CA + AE = f + x\,,\ GE = AG - AE = f - x$$

en dus voldoen de coördinaten van D, bij de gemaakte keuze van $GF{:}CG$, aan

$$y^2 : (f^2 - x^2) = p : 2a = GF : CG = g : l$$

zodat $$\frac{ly^2}{g} = f^2 - x^2.$$

Indien $2a = 2b$, dan geldt $l = g$

en $$x^2 + y^2 = f^2.$$

Als dan ook nog DE loodrecht staat op CG, dan geldt:

$$AD^2 = f^2 = \text{constant}$$

en dus gaat het in dit geval om een cirkel.

[3.6] De vier gevallen waarnaar in deze Algemene Regel wordt verwezen zijn die van blz. [275]. Het verschil tussen deze Algemene Regel en die van blz. [255] is gelegen in de aard van de behandelde krommen. Op blz. [255] gaat het uitsluitend om de parabool in de vier gedaanten van blz. [249]; hier, op blz. [275], zijn de hyperbool en de ellips (c.q. de cirkel) aan de orde.

Dit verschil weerspiegelt zich in de te bespreken vergelijkingen. Hierbij noemt Jan de Witt expliciet de volgende termen (afzonderlijk of in combinatie): xy, x^2, y^2, ax, ay en $\frac{axy}{b}$, waarbij a en b bekende grootheden zijn. Een term als axy kan op grond van het homogeniteitsbeginsel natuurlijk niet voorkomen.

Hij geeft nu de volgende twee substitutieregels:

i. Indien voorkomt de combinatie $xy \pm ay$ en men x wil vervangen, dan stelt men $v = x \pm a$. In de verbale omschrijving van deze substitutie is immers x de te vervangen grootheid, die niet met zichzelf vermenigvuldigd is en a de coëfficiënt van de grootheid die niet vervangen wordt. Wij zouden zeggen 'haal y buiten haakjes' maar dit is een anachronisme. Voor de oorsprong van 'haakjes' wordt de lezer verwezen naar Cajori's *A History of Mathematical Notations*, par. 342-355.

ii. Indien de combinaties $x^2 \pm ax$, $x^2 \pm xy$ of $x^2 \pm \frac{axy}{b}$ voorkomen, waarbij de te vervangen grootheid –hier x– wél met zichzelf vermenigvuldigd voorkomt, dan worden de substituties $v = x \pm \frac{a}{2}$, $v = x \pm \frac{y}{2}$, resp. $v = x \pm \frac{ay}{2b}$ voorgeschreven, hetgeen neerkomt op het 'afsplitsen van een kwadraat'.

Hetgeen sub i en ii gezegd is over x, geldt mutatis mutandis ook voor y.

De Algemene Regel zegt nu, dat men na (eventueel herhaalde) toepassing van de genoemde substituties, steeds terecht komt op één van de gevallen van blz. [275],

dat wil zeggen op een hyperbool of een ellips (c.q. een cirkel), althans indien men niet te maken heeft met een parabool.
In hoofdstuk IV worden de gevallen van blz. [275] gegeneraliseerd door x en y te vervangen door lineaire combinaties van x en y.
Deze Regel wordt niet bewezen, maar gedemonstreerd aan de hand van een aantal voorbeelden waaraan de rest van hoofdstuk III gewijd is.

[3.7] Zie ook het begin van aantekening [2.6].

[3.8] Hier worden de termen *determinatio* en *descriptio* als synoniemen gebruikt.

[3.9] Opvallend is het gebruik van de Griekse genitivus pluralis asymptot ω n, met de Griekse letter ω.

[3.10] Jan de Witt gaat zonder de gebruikelijke aankondiging over op de *demonstratio*.

[3.11] In $y^2 + \dfrac{2bxy}{a} + 2cy$ wordt dus gesteld $z = y + \dfrac{bx}{a} + c$. Jan de Witt gaat wel zeer formeel te werk door hieruit y op te lossen en in de vergelijking te substitueren. Het eindresultaat had uiteraard sneller bereikt kunnen worden door op te merken dat

$$y^2 + \frac{2bxy}{a} + 2cy = (y + \frac{bx}{a} + c)^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{2bcx}{a} - c^2 =$$
$$z^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{2bcx}{a} - c^2.$$

De door hem gevolgde methode is echter geheel conform de voorschriften die hij op blz. [281] gegeven heeft.
Vanwege de overzichtelijkheid zullen we de berekening (tot blz. [286] regel 4 v.o.) eerst in moderne stijl weergeven.
In de vergelijking

$$y^2 + \frac{2bxy}{a} + 2cy = \frac{fx^2}{a} + ex + d^2$$

geeft de substitie $z = y + \dfrac{bx}{a} + c$ als resultaat

$$z^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{2bcx}{a} - c^2 = \frac{fx^2}{a} + ex + d^2 \text{ oftewel}$$

$$\frac{a^2z^2}{af + b^2} = x^2 + \frac{a^2ex + 2abcx}{af + b^2} + \frac{a^2d^2 + a^2c^2}{af + b^2}.$$

Stelt men $\quad v = x + \dfrac{a^2e + 2abc}{2af + 2b^2}$

en $\quad 2h = \dfrac{a^2e + 2abc}{af + b^2}$

zodat $\quad v = x + h,$

dan ontstaat

$$\frac{a^2z^2}{af+b^2} = v^2 - \{h^2 - \frac{a^2d^2+a^2c^2}{af+b^2}\}.$$

Dit leidt tot de onderscheiding van twee gevallen:

i. $$h^2 > \frac{a^2d^2+a^2c^2}{af+b^2}$$

ii. $$h^2 < \frac{a^2d^2+a^2c^2}{af+b^2}.$$

In beide gevallen gaat het om een hyperbool; het onderscheid is een verwisseling van abscis en ordinaat. Het tweede geval wordt besproken op blz. [286], regel 3 v.o. tot blz.[288].

De ontaarding waarbij $h^2 = \dfrac{a^2d^2+a^2c^2}{af+b^2}$ blijft buiten beschouwing.

Jan de Witt concludeert nu al dat het om een hyperbool gaat en stuurt aan op de hyperbool die getekend is in de figuur op blz. [284], die we hier herhalen als Figuur 4.3.4.

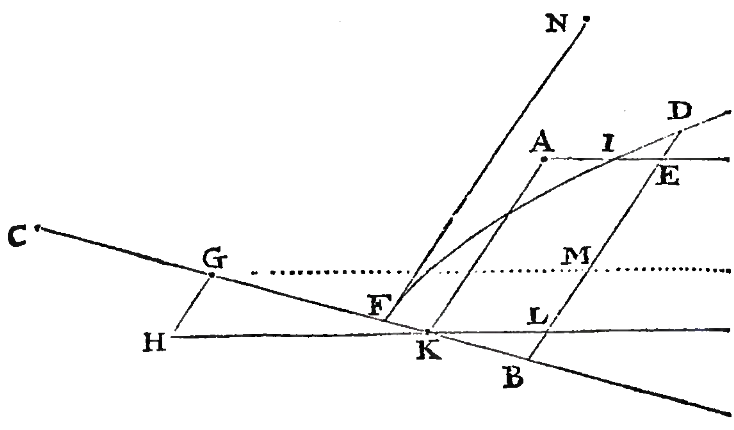
Allereerst wordt de vergelijking nog herleid tot de gedaante

$$\frac{i^2z^2}{af+b^2} = \frac{i^2v^2}{a^2} - \{\frac{i^2h^2}{a^2} - \frac{i^2d^2+i^2c^2}{af+b^2}\}. \qquad (*)$$

Hierin is i bepaald door de evenredigheid

$$KH : HG : GK = a : b : i.$$

Jan de Witt beweert nu dat deze vergelijking een hyperbool voorstelt en hij heeft daarbij al een speciale hyperbool voor ogen.



FIGUUR 4.3.4

Deze hyperbool wordt geconstrueerd met behulp van de coëfficiënten a, b, c, d, e en f (die in de gegeven vergelijking optreden) en wel aldus: door A wordt AK getrokken (naar beneden) onder de 'gegeven hoek' met AE en ter lengte van c.
Vervolgens wordt KL getrokken, evenwijdig aan AE; hierop wordt vanaf K naar links een stuk $KH = h$ afgezet. Indien men H als oorsprong kiest en HK als abscis-as, dan correspondeert dit met de substitutie $v = x + h$.
Hierna wordt door H, evenwijdig aan AK een rechte getrokken, waarop een punt G zodanig gekozen wordt dat $GH : HK = b : a$. Vervolgens wordt de lijn GK getrokken. De verhouding $KG : KH$ ligt nu ook vast; deze stelden we op $i : a$, dan geldt dus

$$KH : HG : KG = a : b : i \text{ en dus ook } KL : LB : KB = a : b : i.$$

Men kiest nu GK als abscis-as, G als oorsprong daarop en men noemt de abscis-waarden w en de ordinaatwaarden z. Deze constructie correspondeert met de substitities

$$w = \frac{i(x+h)}{a} = \frac{iv}{a}$$

en

$$z = y + \frac{bx}{a} + c\,.$$

Jan de Witt voert echter geen w in, maar blijft werken met $\frac{iv}{a}$, welke term, zoals hij opmerkt, na alle vermenigvuldigingen en delingen, in het kwadraat moet voorkomen met coëfficiënt 1, dus als $\frac{i^2v^2}{a^2}$ 'sec'. Hij werkt immers toe naar een vergelijking van de gedaante van Stelling XII, dus naar

$$\frac{ly^2}{g} = x^2 - f^2,$$

waarbij in ons geval y vervangen is door z en x door $w = \frac{iv}{a}$.
De beoogde hyperbool heeft nu G als middelpunt en GK als drager van de middellijn, met de richting van AK als de daaraan toegevoegde richting.
Als lengte van de halve transversale middellijn wordt gekozen:

$$CG = GF = \sqrt{\frac{i^2h^2}{a^2} - \frac{i^2d^2 + i^2c^2}{af + b^2}}$$

en de verhouding van de transversale zijde CF tot de rechte zijde (parameter) FN wordt gesteld op $CF : FN = i^2 : (af + b^2)$.
Het bewijs dat dit inderdaad de hyperbool is die door (*) (blz. 267) wordt voorgesteld, is eenvoudig.
Daartoe nemen we een willekeurig punt $D(x, y)$ op deze kromme en tonen aan dat de abscis (x) en ordinaat (y) daarvan voldoen aan de vergelijking waarvan we uitgingen. Allereerst trekken we $DELB \parallel AK$.
Uit de Figuur 4.3.4 blijkt dan

$$KL : LB : KB = a : b : i, \text{ dus } LB = \frac{bx}{a},$$

zodat $$DB = DE + EL + LB = y + c + \frac{bx}{a} = z.$$

Ook geldt $$GK : HK = i : a$$

en dus $$GK = \frac{ih}{a} \text{ en } KB = \frac{ix}{a},$$

zodat $$GB = GK + KB = \frac{i(x+h)}{a} = \frac{iv}{a}.$$

Op grond van het kenmerk van een hyperbool geldt echter

$$DB^2 : BC.BF = FN : CF.$$

Nu geldt echter $$DB = y + c + \frac{bx}{a} = z$$

en dus

$$z^2 : (\frac{iv}{a} + CG)\ (\frac{iv}{a} - GF) = FN : CF = (af + b^2) : i^2,$$

zodat

$$z^2 : \{\frac{i^2v^2}{a^2} - \frac{i^2h^2}{a^2} + \frac{i^2d^2 + i^2c^2}{af + b^2}\} = (af + b^2) : i^2,$$

waardoor

$$\frac{i^2z^2}{af + b^2} = \frac{i^2v^2}{a^2} - \frac{i^2h^2}{a^2} + \frac{i^2d^2 + i^2c^2}{af + b^2}.$$

Wanneer men dan weer stelt

$$v = x + h,$$

$$z = y + \frac{bx}{a} + c$$

en $$2h = \frac{ea^2 + 2bca}{af + b^2},$$

dan blijkt de vergelijking van deze hyperbool juist de gegeven vergelijking

$$y^2 + \frac{2bxy}{a} + 2cy = \frac{fx^2}{a} + ex + d^2$$

te zijn.

Het geval $h^2 < \dfrac{a^2d^2 + a^2c^2}{af + b^2}$ verloopt analoog en levert eveneens een hyperbool op, maar nu met abscis en ordinaat verwisseld (zie de figuur op blz. [287]).

[3.12] Dit wordt met de direct volgende substitutie aangetoond.

[3.13] Dit tegengestelde geval wordt aan de orde gesteld op blz. [286], regel 3 v.o. (in de Latijnse tekst).

[3.14] Het gaat dus om de gedaante $\frac{ly^2}{g} = x^2 - f^2$. Indien men te maken heeft met de abscis $GB = w = \frac{iv}{a}$ en ordinaat $DB = z$, dan gaat het dus om de vergelijking

$$\frac{lz^2}{g^2} = (\frac{iv}{a})^2 - f^2.$$

[3.15] Jan de Witt baseert zich op de vergelijking in de gedaante

$$\frac{a^2z^2}{af+b^2} = v^2 - h^2 + \frac{a^2d^2 + a^2c^2}{af+b^2}. \qquad (*)$$

Zie hiervoor blz. [283], regel 9 en 10 v.o.

Hierin geldt $z = y + \frac{bx}{a} + c$ en $v = x + h$. In de vergelijking waar hij op uit is en waarbij de rechte door C, G, F en K de rol van de v-as heeft overgenomen, moet, om deze vergelijking de gedaante van Stelling XII te geven (zie aantekening [3.14]), GB^2 $(= (\frac{iv}{a})^2)$ de coëfficiënt 1 hebben.

Jan de Witt geeft om alle verwarring te voorkomen een strakke regel (certa methodus): hij gaat er blijkbaar vanuit dat men in (*) misschien wel zo gemanipuleerd heeft dat de term met v^2 voorzien is van een coëfficiënt $T (\neq 1)$. Zijn voorschrift is nu: deel eerst $\frac{i^2v^2}{a^2}$ door de term met v^2 zoals die voorkomt in (*), dus in het algemeen door Tv^2. Dit levert $\frac{i^2}{a^2T}$. Vermenigvuldig daarna de gehele vergelijking met deze uitkomst. Het is overduidelijk dat dan in het resultaat v^2 voorkomt met $\frac{i^2}{a^2}$ als coëfficiënt en dit geeft nu juist de term GB^2 zonder meer.

Ten overvloede demonstreert hij dit aan de hand van (*): hij deelt $\frac{i^2v^2}{a^2}$ door v^2 (hier geldt immers $T = 1$), dit geeft $\frac{i^2}{a^2}$ en daarna vermenigvuldigt hij de gehele vergelijking met i^2 en deelt hij het resultaat door a^2. Hij is hier wel zeer scrupuleus! Men kan het ook zien als een blijk van de noviteit van de letteralgebra die zojuist zijn intrede had gedaan.

[3.16] Zie aantekening [3.3].

[3.17] Het eerste geval is besproken vanaf blz. [283], regel 6 v.o. (Latijnse tekst) en is zojuist afgehandeld.

[3.18] Jan de Witt volgt ook hier de procedure die hij schetste op blz. [285], regel 15 v.o., maar nu m.b.t. de variabele z. Zo komt hij tot de eerste vergelijking op blz. [287], die in feite de gedaante heeft van de vergelijking in Stelling XIII op blz. [277], t.w. $y^2 - f^2 = \frac{lx^2}{g}$. Hierin dient y vervangen te worden door z en x door $\frac{iv}{a}$.

[3.19] Bedoeld is de *Regula Universalis* op blz. [280].

[3.20] Zie aantekening [3.3].

[3.21] Zie de figuur op blz. [292]. Jan de Witt verzuimt te vermelden dat hij zich beperkt tot alle punten die met de twee gegeven punten in een vast vlak liggen. Bij vraagstuk I op blz. [272], het pendant van dit probleem bij een parabool, noemt hij deze restrictie wel. In vraagstuk III, op blz. [300], het analogon bij een ellips, noemt hij deze restrictie weer niet.

[3.22] Dit is kenmerkend voor de analytische methode.

[3.23] Hier betekent $x = a$ (in de Latijnse tekst) de absolute waarde van het verschil tussen x en a (zie ook aantekening [2.27]).

[3.24] Hier wordt onbekommerd gedeeld door $a^2 - b^2$, zonder te onderzoeken wat er gebeurt als $a = b$. In dit geval bestaat de plaats uit de abscis-as m.u.v. het lijnstuk AB, maar Jan de Witt laat in het algemeen ontaardingen buiten beschouwing.

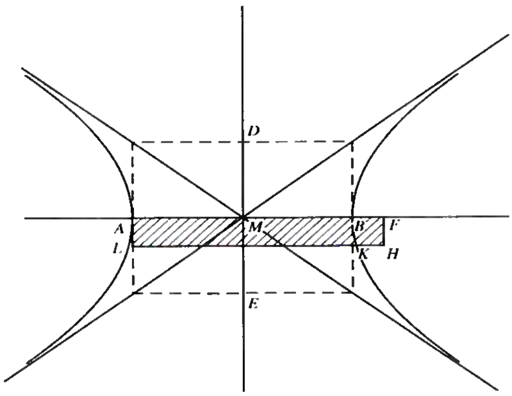
[3.25] Zie aantekening [3.3].

[3.26] Dit is een toespeling op de aanpassing van oppervlakten. Hiervoor zij verwezen naar Liber Primus, Appendix II.

Het woord *figuur* (Latijn *figura*, Grieks *εἶδος*) heeft hier en op blz. [301] een speciale betekenis, nl. de rechthoek met als zijden de transversale as van de hyperbool, resp.van de ellips, zeg $2a$, en de bijbehorende parameter, zeg p. Deze term werd geïntroduceerd door Apollonius (*Conica* I, 14 en 21).

Voor het bepalen van de punten die wij nu brandpunten noemen of (sinds Kepler) foci, gaat Apollonius als volgt te werk (*Conica* III, 45): aan de transversale as wordt vanaf een top een rechthoek aangepast met vierkant exces bij een hyperbool, en met vierkant defect bij een ellips.

Voor de oppervlakte van deze aangepaste rechthoek neemt men het vierde deel van de genoemde *figuur*, dus $\frac{ap}{2}$. In het geval van de hyperbool steekt de aangepaste rechthoek buiten de transversale as uit en wel met een vierkant exces $BFHK$ (zie Figuur 4.3.5); in het geval van de ellips ontbreekt een vierkant defect (zie Figuur 4.3.8). Indien we deze aangepaste rechthoek $AFHL$ noemen, dan ontstaat bij een hyperbool op het verlengde van AB een punt F indien de aanpassing begint vanuit A; bij een ellips ontstaat een punt F tussen A en B. Begint men de aanpassing vanuit B, dan ontstaat op analoge wijze een punt G.



FIGUUR 4.3.5

De bewering is nu dat genoemde punten F en G de ons bekende brandpunten zijn. Het bewijs is eenvoudig. In deze aantekening geven we het bewijs voor een hyperbool, in aantekening [3.42] behandelen we de ellips.

Stel in Figuur 4.3.5 $AM = MB = a$ en laat de parameter p zijn, dan geldt $AF.FH = \frac{2ap}{4}$, en omdat $FH = FB$, geldt dus ook $AF.FB = \frac{ap}{2}$.

Stel nu $DM = ME = b$ (de halve nevenas) en $MF = c$, dan geldt

$$AF.FH = AF.\ FB = (c + a)(c - a) = \frac{ap}{2}.$$

Maar omdat p is gedefinieerd door de betrekking $2a{:}2b = 2b{:}p$ (Liber I, blz. 235)

geldt $$(c + a)(c - a) = b^2$$

en dus $$c^2 = a^2 + b^2.$$

Hieruit blijkt dat $F(c,0)$ een brandpunt is in onze betekenis. Voor $G(-c,0)$ gelden analoge redenering en conclusie.

Apollonius leidde uit deze constructie meetkundig af dat voor een punt P op de hyperbool de lijnen PF en PG gelijke hoeken maken met de raaklijn in P (*Conica* III, 48) en dat tevens geldt $|PF - PG| = 2a$ (*Conica* III, 51).

De brandpunten van een ellips of een hyperbool hebben in de oudheid geen aparte naam, maar worden door Apollonius omschreven als

τά εκ της παραβολης γινόμενα σημεια,

dat wil zeggen als *de punten die ontstaan door de aanpassing.*

Zoals reeds in aantekening [2.26] werd opgemerkt, spreekt hij in het geheel niet over het brandpunt van een parabool.

[3.27] Bij Jan de Witt zijn *tegengestelde hyperbolen* datgene wat wij de beide takken van een hyperbool noemen.

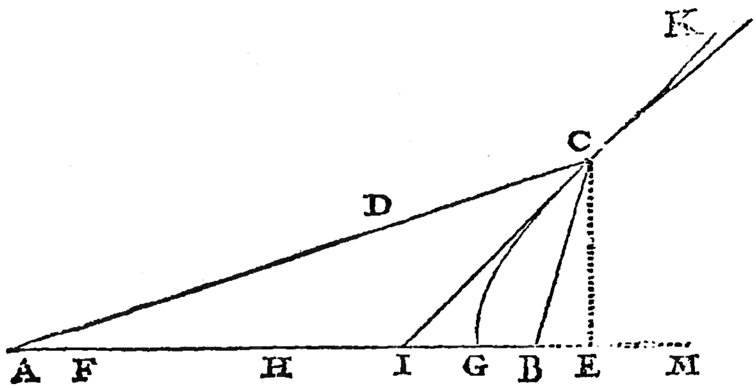
[3.28] De opmerking dat de waarheid van dit Gevolg 1 'uit het voorafgaande volkomen duidelijk blijkt', vindt haar rechtvaardiging in de regels 3-6 v.o. van de vertaling van blz. [292] op blz. 158. Daar wordt immers uit de vergelijking van de hyperbool afgeleid dat de lengte van de transversale as gelijk is aan b, en dit is juist het constante verschil van de afstanden van de gezochte punten tot de vaste punten A en B. Bij het analogon van dit vraagstuk voor de ellips maakt Jan de Witt geen overeenkomstige opmerking, hoewel daar, mutatis mutandis, hetzelfde geldt.

Bij de genoemde 'omwegen en lange aaneenschakeling van moeilijke redeneringen' dacht Jan de Witt wellicht aan de bewijzen van de stellingen III, 51 en 52 bij Apollonius, die verlopen via zes voorbereidende stellingen, nl. III, 42, 45, 46, 48, 49, 50.

[3.29] Zie de figuur op blz. [292] en ook blz. [293], regel 4 v.b.

[3.30] De kern van het bewijs is de constructie van een punt M op het verlengde van de transversale middellijn (as) FG zodanig dat $AC = FM$ en $BC = GM$. Zie hiervoor de figuur op blz. [292] en Figuur 4.3.6. Hierin zijn A en B de brandpunten en F en G de toppen van de hyperbool. Het is dan direct duidelijk dat $AC - BC = FM - GM = FG$, hetgeen te bewijzen was. Het gaat nu om de constructie van dit punt M.

Fig. 1.



FIGUUR 4.3.6

Daartoe wordt allereerst CE loodrecht op de drager van de as getrokken; deze CE is dus geordend aangebracht op de as.

Indien we de lengte van de halve transversale as (= HF = HG) en van de halve tweede middellijn op de voor ons gebruikelijke wijze voorstellen door a, resp. b (we verlaten dus de notaties van Jan de Witt), dan geldt volgens regel 4 v.b. op blz. [293] dat

$$FB.BG = GA.AF = b^2 . \qquad (1)$$

Op het verlengde van FG wordt nu het punt M gekozen zodanig dat

$$HE : HM = HF : HA \text{ en dus } AH.HE = FH.HM,$$

hetgeen Jan de Witt op de gebruikelijke wijze aangeeft door te schrijven dat de rechthoek AHE gelijk is aan de rechthoek FHM.

Vervolgens past Jan de Witt Stelling IX, Propositie 10 uit Liber Primus (blz.[196]) toe. In aantekening [3.3] hierboven is deze samengevat.

Voor ons geval betekent dit $FE.EG : CE^2 = a^2 : b^2$.
Met (1) geeft dit $FE.EG : CE^2 = HF^2 : GA.AF$.
Hieruit volgt $FE.EG : (FE.EG + CE^2) = HF^2 : (HF^2 + GA.AF)$. (2)
Jan de Witt gebruikt hier de uitdrukking *compositio rationis contraria* dat wil zeggen *de tegenhanger van samenstelling van een verhouding*.
Het begrip samenstelling van een verhouding (*compositio rationis, σύνθεσις λόγου*) is gedefinieerd door Euclides (*El.* V, def. 14) als de overgang van de verhouding $a : b$ naar de verhouding $(a + b) : b$. Bij deze bewerking wordt opgeteld.
Jan de Witt gebruikt hier de tegenhanger daarvan, namelijk de overgang van $a : b$ naar $a : (a + b)$, die overigens niet expliciet voorkomt bij Euclides.
Naast deze samenstelling van verhoudingen komen bij Euclides verder voor:
Scheiding van een verhouding (*separatio rationis, διαίρεσις λόγου, El.* V, def. 15).
Dit begrip is gedefinieerd als de overgang van de verhouding $(a + b) : b$ naar de verhouding $a : b$. Indien $a > b$, dan kan men dit lezen als de overgang van de verhouding $a : b$ naar $(a - b) : b$. Bij deze bewerking wordt afgetrokken.
Omzetting van een verhouding (*conversio rationis, αναστροφή λόγου, El.* V, def. 16).
Dit begrip is gedefinieerd als de overgang van de verhouding $(a + b) : b$ naar de verhouding $(a + b) : a$. Indien $a > b$, dan kan men dit lezen als de overgang van de verhouding $a : b$ naar de verhouding $a : (a - b)$. Ook bij deze bewerking wordt afgetrokken.
Samenvattend zijn dus de volgende overgangen gedefinieerd:

i. van $a : b$ naar $(a + b) : b$; en van $a : b$ naar $a : (a + b)$;
ii. van $a : b$ naar $(a - b) : b$ en van $a : b$ naar $a : (a - b)$.

Euclides toont aan dat een evenredigheid geldig blijft indien op beide leden een van deze door hem gedefinieerde bewerkingen wordt toegepast.

Terloops merkt Jan de Witt op, dat $HF^2 + GA.AF = HA^2$. (3)
Hierbij allereerst twee opmerkingen over de tekst:

i. de notatie *HFq* voor HF^2 komt al voor bij Fermat.

De notaties *Aq* voor A^2, *Ac* voor A^3 en combinaties daarvan, werden geïntroduceerd door William Oughtred (1575-1660).

ii. Jan de Witt schrijft: *HFq* ad (*HFq* + *GAF*, id est, ad) *HAq*. De kern van de mededeling is: *HFq* ad *HAq*, d.w.z $HF^2 : HA^2$. Tussen haakjes deelt hij mee dat *HFq* + *GAF* gelijk is aan *HAq*. Deze haakjes zijn dus haakjes als onderdeel van de verbale tekst en niet als haakjes als onderdeel van een wiskundige formule! Daarom staat *id est* ook binnen de haakjes. Zie i.v.m. de haakjes ook aantekening [3.6]

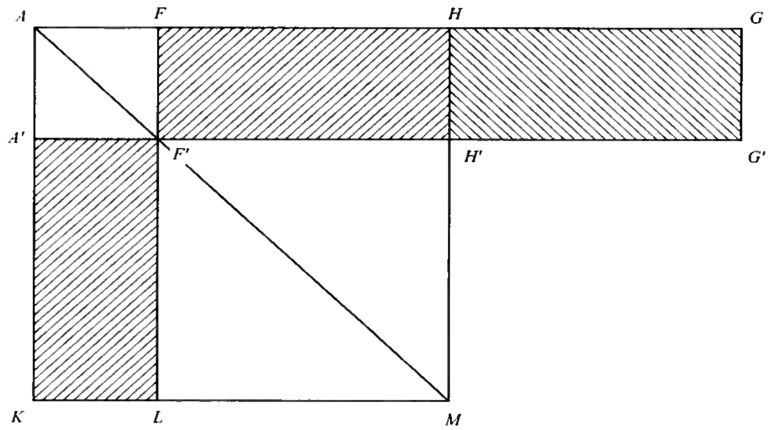
Wij zouden (3) kunnen bewijzen door op te merken dat $GA = AF + 2HF$ en dat dus

$$HF^2 + GA.AF = HF^2 + (AF + 2\,HF).AF = (HF + AF)^2 = HA^2.$$

Voor deze overgang verwijst De Witt echter in kanttekening (3) naar *El.* II, 6, waar men leest:

Indien een lijnstuk gehalveerd wordt en een lijnstuk daaraan wordt toegevoegd, dan is de rechthoek, ingesloten door het gehele lijnstuk vermeerderd met de verlenging, en het toegevoegde lijnstuk zelf, tezamen met het vierkant op de helft, gelijk aan het vierkant op het lijnstuk bestaande uit de helft en het toegevoegde lijnstuk.
In Figuur 4.3.7 is dit toegelicht. Hier gaat het om het lijnstuk FG dat in H gehalveerd wordt. Aan FG is het lijnstuk AF toegevoegd. Er geldt dan:

$$AG.AF + FH^2 = AH^2.$$



FIGUUR 4.3.7

Het bewijs verloopt via de meetkundige algebra en is in Figuur 4.3.7 toegelicht.
Hier geldt $FH = HG$ en $AA' = AF$; de hoeken bij A, F, H, G, G', H', F', A', K, L, M zijn recht. Uit de gelijkheid van de gearceerde oppervlakken $HGG'H'$, $FHH'F'$ en $A'F'LK$ ziet men duidelijk dat de rechthoek $AGG'A'$ (zeg R) dezelfde oppervlakte heeft als de rand (*gnomon*) $AFHH'F'LKA'A$ (zeg T).
Men ziet dan:

$$\text{opp. } R + \text{opp. } F'H'ML = \text{opp. } T + \text{opp. } F'H'ML =$$
$$\text{opp. } AHMK = AH^2.$$

Omdat $AF = AA'$, geldt

$$\text{opp. } R = AA'.AG = AG.AF$$

en dus $AG.AF + FH^2 = AH^2$.
Indien we stellen $FH = HG = a$ en $AF = b$ dan is dus in feite bewezen de formule

$$(b + 2a)b + a^2 = (a + b)^2.$$

Analoog kan men bewijzen $HF^2 + FE.EG = HE^2$ (Figuur 4.3.6). (4)
Opvallend is dat Jan de Witt zich hier niet aansluit bij de techniek van de letteralgebra, die in zijn tijd opgang maakte.

Op grond van (2) en (3) geldt dus:

$$FE.EG : (FE.EG + CE^2) = HF^2 : HA^2.$$

Nu past Jan de Witt de regel toe dat uit $a : b = c : d$ volgt $(a + c) : (b + d) = c : d$.

Dit geeft:

$$(HF^2 + FE.EG) : (HA^2 + FE.EG + CE^2) = HF^2 : HA^2.$$

Met (4) geeft dit:

$$HE^2 : (HA^2 + FE.EG + CE^2) = HF^2 : HA^2.$$

Nu was M zo gekozen dat

$$HE : HM = HF : HA \text{ zodat } HE^2 : HM^2 = HF^2 : HA^2.$$

Uit de laatste twee regels volgt dan

$$HM^2 = HA^2 + FE.EG + CE^2$$

en $HM^2 + HF^2 = HA^2 + (HF^2 + FE.EG) + CE^2$, dat wil zeggen met (4)

$$HM^2 + HF^2 = HA^2 + HE^2 + CE^2 \qquad (5)$$

We vermeerderen (in een andere situatie, verminderen) linkerlid en rechterlid resp. met $2HM.HF$ en $2HA.HE$ (volgens definitie van M gelijk aan elkaar).
Dit levert in ons geval

$$(HM + HF)^2 = (HA + HE)^2 + CE^2 = AE^2 + CE^2$$

zodat $FM^2 = AC^2$, oftewel $FM = AC$.

Indien men de beide leden van (5) vermeerdert (c.q. vermindert) met resp. $2HM.HG$ en $2\ HA.HE$ (aan elkaar gelijk omdat $HG = HF$ en $HM.HF = HA.HE$) dan vindt men

$$GM = BC$$

en dus geldt $AC - BC = FM - GM = FG$.

[3.31] De beide figuren op blz. [295] behandelen de gevallen waarbij K rechts, dan wel links van CI ligt; op blz. [291] is medegedeeld dat $AD = FG$ (de transversale middellijn).

[3.32] $DC = AC - AD$ en $AD = FG = AC - BC$, dus $DC = BC$; verder heeft $\angle DCK$ als nevenhoek $\angle DCI$ en $\angle BCK$ heeft als nevenhoek $\angle BCI$, waarbij $\angle DCI = \angle BCI$.

[3.33] $AL - LB = FG = AD$, $AK = AL + LK$, dus $AK - (BL + LK) = AD$, maar $BL + LK > BK$ en $BK = KD$, dus $AK - KD > AD$, hetgeen onmogelijk is.

[3.34] Uiteraard worden a en b positief ondersteld; $a < b$ zou een hyperbool geven en $a = b$ een parabool.

[3.35] Men trekt dus eerst door L een lijn evenwijdig aan AK en kiest daarop een punt B zodanig dat $KL : LB = a : b$.

[3.36] Het gaat om de laatste vergelijking op blz. [296]. Voor een analoge redenering zie ook de aantekeningen [3.11] en [3.15].

[3.37] Ter verduidelijking van de keuze van de verhouding $CF : FN$, het volgende: als de vergelijking op toegevoegde middellijnen luidt

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

dan is de transversale middellijn 2α, de tweede middellijn 2β en voor de parameter p (gedefinieerd door $2\alpha : 2\beta = 2\beta : p$) geldt, zoals we al zagen in [3.3],

$$2\alpha : p = \alpha^2 : \beta^2.$$

In ons geval luidt de vergelijking

$$\frac{le^2z^2}{ga^2} = \frac{f^2e^2}{a^2} - \frac{e^2v^2}{a^2},$$

waarbij de rol van x, resp. y, overgenomen is door

$$\frac{ev}{a} = x \text{, resp. } z = y,$$

zodat $$\alpha^2 = \frac{f^2e^2}{a^2} \ , \beta^2 = \frac{ga^2}{le^2} \frac{f^2e^2}{a^2} = \frac{f^2g}{l}$$

en dus $$2\alpha : p = \alpha^2 : \beta^2 = \beta^2 \ \frac{f^2e^2}{a^2} : \frac{f^2g}{l} = le^2 : ga^2.$$

Stelt men $FN = p$, dan geldt voor de figuur op blz. [297] (zie ook blz. [298], regel 11 v.o.)

$$CF : FN = 2\alpha : p = le^2 : ga^2.$$

[3.38] Indien we in de figuur op blz. [299] de transversale middellijn FC voorstellen door 2α, de tweede middellijn door 2β en de parameter FN door p, dan volgt uit de definitie van p, nl. $2\alpha : 2\beta = 2\beta : p$, dat $p = 2\alpha$ impliceert $\alpha^2 = \beta^2$ en dus $\alpha = \beta$. De vergelijking van de kromme op de assen FGC en GH wordt dan $x^2+y^2 = \alpha^2$. Uit de loodrechte stand van de assen volgt dan direct dat x^2+y^2 het kwadraat van de afstand van een punt $D(x,y)$ op de kromme tot G voorstelt en dus eveneens constant is zodat het hier om een cirkel gaat.

[3.39] De letters A en B komen in Figuur I (blz. [300]) elk tweemaal voor; wij zullen ons beperken tot de onderste. Overigens verzuimt Jan de Witt te vermelden dat hij slechts geïnteresseerd is in een verzameling van punten die alle in een vlak liggen.

[3.40] Indien $a = b$, dan is de plaats het lijnstuk AB.

[3.41] In deze formule schrijft De Witt ten onrechte x in plaats van v. De verwijzing naar Stelling 13 is onjuist; dit moet zijn Stelling XIV (op blz. [279]).

[3.42] De situatie hier is het analogon van de situatie in aantekening [3.26], waar Apollonius' constructie van de brandpunten van de hyperbool uiteengezet is. Nu zijn de brandpunten van de ellips aan de orde (zie Figuur 4.3.8). In deze figuur gaat het om de ellips met grote as AB (= $2a$), kleine as DE (= $2b$) en parameter p. Aan de as AB is vanuit A de rechthoek $AFHL$, met oppervlakte $2ap/4$ (het vierde deel van de 'Figuur') aangepast en wel met vierkant defect $FBKH$ (zie hiervoor Appendix II van Liber Primus). Indien we in de figuur nog stellen $MF = c$, dan geldt

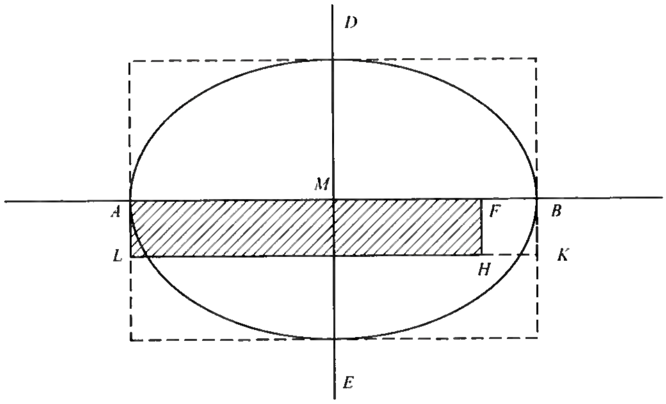
$$AF.FH = AF.FB = (a + c)\,(a - c) = \frac{ap}{2}.$$

Aangezien echter $$p = \frac{2b^2}{a}$$ (Liber Primus, blz. 235),

geldt $$a^2 - c^2 = b^2.$$

Hieruit volgt dat $F(c,0)$ een brandpunt is (in onze betekenis). Voor $G(-c, 0)$, ontstaan bij aanpassing vanuit B, gelden analoge redenering en conclusie.

Apollonius leidde uit deze constructie meetkundig af dat voor een punt P op de ellips de lijnen *PF* en *PG* gelijke hoeken maken met de raaklijn in *P* (*Conica* III, 48) en dat tevens geldt $PF + PG = 2a$ (*Conica* III, 52).

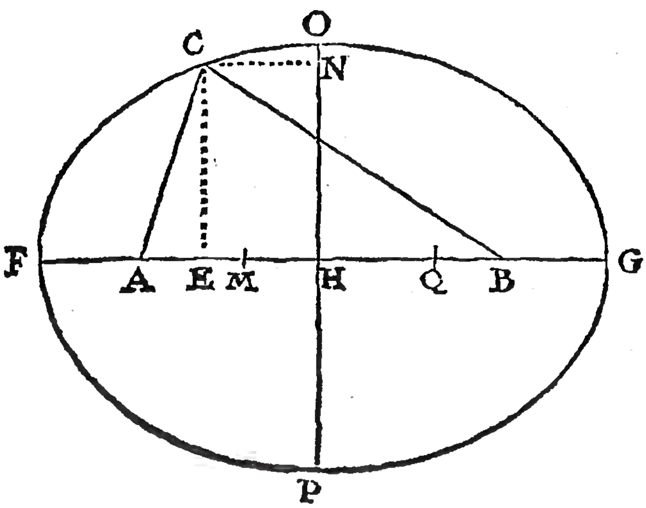


FIGUUR 4.3.8

[3.43] Jan de Witt gebruikt hier *subductio* voor aftrekking en *divisio* (scheiding) voor de standaardterm *conversio,* die hij verderop hanteert. Zie ook aantekening [3.30].

[3.44] Voor het verschil in bewijsvoering zie aantekening [3.45].

[3.45] Dit gevolg is het analogon van gevolg I van Vraagstuk II op blz. [291]. Ook nu wordt op de transversale as een punt *M* geconstrueerd zodanig dat $CA = FM$ en $CB = MG$; in dit geval wordt hiermee aangetoond dat $CA + CB = FG$ (zie de figuur op blz. [302] en bijgevoegde Figuur 4.3.9).



FIGUUR 4.3.9

Allereerst wordt CE loodrecht op de transversale as getrokken; deze CE is dus geordend aangebracht op deze middellijn. Verder wordt CN getrokken loodrecht op de tweede middellijn OP; deze CN is dus geordend aangebracht op de tweede middellijn.
Voorts geldt volgens blz. 176, regel 2 en 3 v.o. (in de vertaling), dat

$$FA.AG = GB.BF = HO^2.$$

Op de transversale middellijn wordt nu een punt M gekozen, zodanig dat

$$HE : HM = HF : HA \text{ en dus } AH.HE = FH.HM. \tag{1}$$

Dit drukt Jan de Witt weer uit door te zeggen dat de rechthoek AHE gelijk is aan de rechthoek FHM.
Opgemerkt zij dat het punt M dus altijd tussen de punten E en H ligt.
Op HG kiest men nog een punt Q, zodanig dat $HQ = HE$.
Uit (1) volgt

$$HE^2 : HM^2 = HF^2 : HA^2.$$

Nu beroept Jan de Witt zich op de 'omzetting' van een verhouding (conversio rationis, zie aantekening [3.30]) waaruit volgt

$$HE^2 : (HE^2 - HM^2) = HF^2 : (HF^2 - HA^2) \tag{2}$$

en dus

$$HE^2 : EM.MQ = HF^2 : GA.AF \tag{3}$$

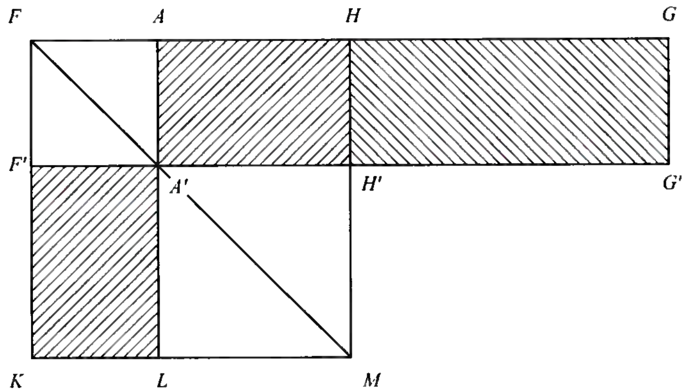
Deze laatste overgangen vergen toelichting. Wij zien eenvoudig in

$$HE^2 - HM^2 = (HE - HM)(HE + HM) = EM.MQ. \tag{4}$$

en analoog

$$HF^2 - HA^2 = GA.AF. \tag{5}$$

Blijkens zijn kanttekeningen leidt Jan de Witt dit resultaat echter af met behulp van de meetkundige algebra van Euclides en hij beroept zich daarbij voor de overgangen in (3) op *Elementa* II, 5 (zie ook aantekening [3.30]).
Deze genoemde plaats bij Euclides luidt:
Indien een lijnstuk verdeeld wordt in gelijke en ongelijke delen, dan is de rechthoek, ingesloten door de ongelijke delen van het geheel, vermeerderd met het vierkant op het lijnstuk tussen de deelpunten, gelijk aan het vierkant op de helft.
In Figuur 4.3.10 wordt het bewijs hiervan toegelicht; hier gaat het om het lijnstuk FG. Dit wordt door H in twee gelijke delen (FH en HG) verdeeld en door A in twee ongelijke delen (FA en AG). De hoeken bij F, A, H, G, G', H', A', F', K, L, M zijn recht; $FF' = FA$.



FIGUUR 4.3.10

Er geldt dan:

	opp. $FH\,H'\,F'$	=	opp. $HGG'H'$
en	opp. $AH\,H'\,A'$	=	opp. $F'A'LK$,
dus	opp. *gnomon* $FAHH'A'LKF'F$ =		
	opp.$AGG'A' = GA.AA' = GA.AF$.		
Echter	opp. *gnomon* + opp. $A'H'ML$ = opp. $FHMK$,		
dus	$GA.AF + HA^2 = HF^2$.		
Stelt men	$GH = HF = a$ en $AF = b$, dan is dus bewezen:		
	$(2a - b)\,b + (a - b)^2 = a^2$.		

We passen deze stelling toe op het lijnstuk FG in de figuur op blz. [302] (=Figuur 4.3.9); ook hier is H het midden en A het deelpunt voor de ongelijke delen. In deze figuur geldt dus eveneens

$$GA.AF + HA^2 = HF^2 \text{ en dus } HF^2 - HA^2 = GA.AF.$$

Zo is ook het lijnstuk EQ in dezelfde figuur gehalveerd door H en in ongelijke delen (EM en MQ) verdeeld door M. Nu geldt

$$EM.MQ + HM^2 = HE^2 \text{ en ook } HE^2 - HM^2 = EM.MQ.$$

Zo volgt uit (2) uiteindelijk

$$HE^2 : EM.MQ = HF^2 : GA.AF. \qquad (6)$$

Op blz. [301], regel 13 en 14 v.o. zagen we dat $GA.AF = HO^2$, zodat (6) overgaat in

$$HE^2 : EM.MQ = HF^2 : HO^2. \qquad (7)$$

Indien we de ellips zien als een ellips met OP als transversale middellijn en GF als tweede middellijn, dan geldt volgens het kenmerk van een ellips (zie aantekening [3.5])

$$CN^2 : ON.NP = HF^2 : HO^2 \qquad (8)$$

en, omdat $CN = HE$, volgt uit (7) en (8)

$$HE^2 : EM.\ MQ = HE^2 : ON.NP,$$

zodat

$$EM.MQ = ON.NP. \tag{9}$$

Hierbij zij opgemerkt dat Jan de Witt bij de behandeling van gevolg 1 van Vraagstuk II op blz. [292] een analoge weg had kunnen volgen indien hij de toegevoegde hyperbool in zijn beschouwingen had betrokken. Hierin ligt het door hem aangekondigde verschil in bewijsvoering.
Volgens (4) geldt

$$HM^2 + EM.MQ = HE^2$$

en zo geeft (9)

$$HM^2 + ON.NP = HE^2. \tag{10}$$

Uit (5) volgt, met blz. 176 regel 2 en 3 v.o. (in de vertaling),

$$HF^2 = HA^2 + GA.AF = HA^2 + HO^2. \tag{11}$$

Uit *El.* II, 5, toegepast op *ONHP* in Figuur 4.3.9, volgt echter

$$HO^2 = ON.NP + NH^2 = ON.NP + CE^2$$

Dus

$$HF^2 = HA^2 + CE^2 + ON.NP. \tag{12}$$

Uit (10), (11) en (12) volgt

$$HM^2 + ON.NP + HF^2 =$$
$$HE^2 + HF^2 = HE^2 + HA^2 + CE^2 + ON.NP$$

en dus

$$HM^2 + HF^2 = HE^2 + HA^2 + CE^2 \tag{13}$$

en evenzo

$$HM^2 + HG^2 = HE^2 + HB^2 + CE^2. \tag{14}$$

Indien E tussen F en H ligt, dan trekt men in (13) links $2HF.HM$ af en rechts $2HE.HA$ (op grond van de definitie van M zijn deze termen immers gelijk). Het resultaat is dan

$$(HF - HM)^2 = (HA - HE)^2 + CE^2$$

zodat

$$FM^2 = AE^2 + CE^2 = AC^2 \text{ en dus } FM = AC.$$

Indien E ligt tussen H en G, dan telt men in (13) links $2HF.HM$ bij en rechts $2HE.HA$.
Indien men in (14) analoge bewerkingen uitvoert met $2HG.HM$ resp. $2HE.HB$, dan vindt men

$$GM^2 = EB^2 + CE^2 = CB^2 \text{ en dus } GM = CB.$$

Het is dan duidelijk dat

$$CA + CB = FG.$$

[3.46] Hier worden voor de eerste maal de termen grote en kleine as gebruikt.
[3.47] Zie blz. 176, regel 2 en 3 v.o. (in de vertaling).
[3.48] Volgens onderstelling is $\angle ACI = \angle BCK$ en ook geldt $\angle LCK = \angle ACI$.

Hoofdstuk IV

[4.1] Het meervoud van ‘locus’ (m.) is meestal ‘loca’ (n.) i.p.v. ‘loci’ (m.).

[4.2] In de kantlijn wordt vermeld dat het teken ☊ staat voor ±. Hier komt dit teken voor het eerst voor. In de herdrukken van de *Geometria* van Van Schooten komt het voor tot in 1695 en het omgekeerde ervan voor ∓. In de zeventiende eeuw was ons teken ± ook al gebruikelijk (zie ook Cajori I, §210).

[4.3] Zie blz. [248] en [249].

[4.4] Het teken • in bijvoorbeeld $y^2 = dx \bullet f^2$ betekent ±, maar impliceert bij Jan de Witt ook het geval $y^2 = -dx + f^2$, zoals bijvoorbeeld op blz. [308], regel 2 v.o. Uiteraard is $y^2 = -dx - f^2$ niet mogelijk daar de coëfficiënten, i.c. d, uitsluitend positief zijn; zij stellen immers lijnstukken voor. Deze notatie stamt van Descartes (zie *La Géométrie* blz. 383).

[4.5] Het gaat om de substituties

$$z = y \pm \frac{bx}{a} \pm c, \text{ gecombineerd met } v = x \pm c \text{ en}$$

$$v = x \pm \frac{by}{a} \pm c, \text{ gecombineerd met } z = y \pm c.$$

Hierbij zijn de coëfficiënten a, b en c positief (want lijnstukken); $\frac{bx}{a}$ en c kunnen eventueel ontbreken. De breuk $\frac{b}{a}$ wordt gedicteerd door de eis van homogeniteit, welke eis Descartes heeft laten varen. Deze breuk heeft, evenals bij Descartes, een goniometrische betekenis, zoals we al in vele voorbeelden zagen.

De eerste substitutie stelt een draaiing van de x-as voor, gevolgd door een translatie evenwijdig aan de x-as, gecombineerd met een translatie evenwijdig aan wat wij de y-as zouden noemen. Bij de tweede substitutie zijn x en y verwisseld.

[4.6] Het is duidelijk dat het voorteken van $\frac{lx^2}{g}$ en het teken tussen $\frac{lx^2}{g}$ en f^2 beslissen over de vraag ‘ellips of hyperbool?’ Wat bedoeld wordt met ‘het onderscheid in de hoeken’ blijkt uit blz. [318], regel 15 v.b. Wanneer immers bij een ellips de aan een middellijn toegevoegde richting loodrecht staat op deze middellijn èn de parameter p gelijk is aan de transversale middellijn $2a$, dan volgt uit de definitie van de parameter, behorende bij de middellijnen $2a$ en $2b$, namelijk $2a : 2b = 2b : p$, dat $2a = 2b$ en dus gaat het om een cirkel. Zie hiervoor aantekening [3.38].

[4.7] Hieruit blijkt weer dat de abscis x en de ordinaat y gezien worden als lijnstukken. Opvallend is ook dat Jan de Witt nogmaals de betekenis van de oorsprong en de abscis-as benadrukt.

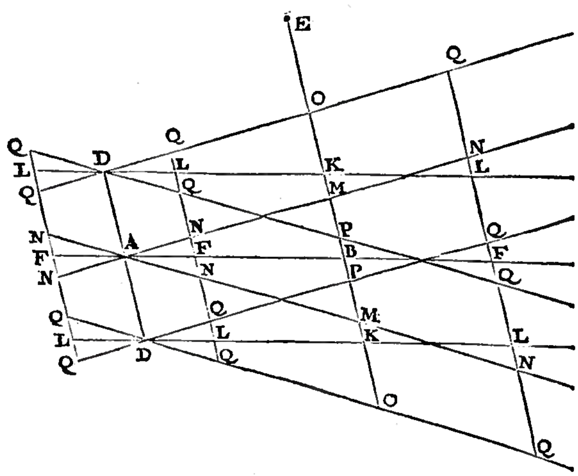
[4.8] N.B.slechts wat ‘boven’ de abscis-as ligt, telt mee.

[4.9] Het punt H wordt al genoemd op blz. [306] in regel 11 v.o. Daar is het nog een willekeurig punt op de rechte BE. Eerst op blz. [307], regel 3 v.b. wordt dit punt vastgelegd. Deze handelwijze komt vaak voor in dit werk.

[4.10] Zie aantekening [4.8].

[4.11] De werkwijze van Jan de Witt is de gebruikelijke: eerst construeert hij met behulp van de coëfficiënten a, b en c die in de vergelijkingen voorkomen, een aantal rechten en bewijst daarna dat de abscis en de ordinaat van elk van de punten op deze rechten voldoen aan de bijbehorende vergelijking.
Deze methode volgde hij eerder, maar nu ook in het gehele hoofdstuk IV. Hij hanteert weer de termen *determinatio* (de bepaling of definitie van de betreffende kromme) en de *demonstratio* (het bewijs dat abscis en ordinaat van de punten op deze kromme inderdaad aan de vergelijking voldoen). Al eerder merkten we op dat in nagenoeg alle gevallen het bewijs ontbreekt dat elk punt waarvan de abscis en ordinaat aan de betrokken vergelijking voldoen, ook inderdaad op de betreffende kromme ligt. Tenslotte zij er op gewezen dat de figuur op blz. [307] niet conform de realiteit is, immers
$AB : BD = a : b$ en $AB : BH = a : b$, maar in de figuur lijkt $BD > BH$.

[4.12] Vanaf dit punt tot blz. [314], regel 4 v.o. worden de vergelijkingen in de eerste kolom van geval 2 op blz. [305] aan de orde gesteld. Hier gaat het om parabolen. Allereerst worden weer met behulp van de coëfficiënten die in de vergelijkingen optreden, krommen geconstrueerd volgens een in de tekst genoemd procédé (de *determinatio*). Hierbij worden negen gevallen onderscheiden, waarvan de meeste weer verdeeld zijn in subgevallen. Deze beschrijving loopt voort tot blz. [311], regel 5 v.b.; in de Samenvating vindt men een overzicht daarvan.
Bij elke *determinatio* behoort een *demonstratio*; voor elk van de negen gevallen vindt men deze vanaf blz. [311] regel 6 v.b. tot blz. [314] regel 4 v.o.
De tweede kolom op blz. [305] wordt, summierder, behandeld op blz. [314], regel 3 v.o. tot [318], regel 9 v.b.; daarbij gaat het slechts om een verwisseling van abscis en ordinaat.



FIGUUR 4.4.1

[4.13] In dit hoofdstuk illustreert Jan de Witt zijn betoog aan de hand van een aantal figuren die op het eerste gezicht nogal gecompliceerd lijken, mede doordat veel verschillende punten met dezelfde letter worden benoemd. Zie hiervoor bijvoorbeeld de figuur op blz. [308] (= Figuur 4.4.1).
Toch zit daar een duidelijk systeem in, hetgeen het lezen van deze figuren goed mogelijk maakt. Punten die met eenzelfde letter worden aangeduid, hebben namelijk steeds dezelfde betekenis voor de betreffende kromme: zij zijn steeds top of middelpunt, eindpunt van een as, etc., maar dan bij krommen in verschillende standen.
In feite representeert één figuur in dit hoofdstuk een groot aantal situatietekeningen, maar dan over elkaar gedrukt.
Zoals Jan de Witt hier zegt, gaat hij, evenals elders in dit boek, in alle gevallen uit van een vast punt A, een vaste rechte AB (met variabele B daarop) en een vaste hoek ABE; AB en BE stellen weer de abscis x en de ordinaat y van de optredende punten voor.
Het punt A treedt in eerste instantie op als top van een parabool dan wel als middelpunt van een hyperbool of ellips, waarbij AB de drager van een middellijn is.
We nemen als voorbeeld Figuur 4.4.1. Hier gaat het om parabolen. In eerste instantie ligt de top, zoals gezegd in A, maar in de loop van de beschouwingen wordt deze top naar links of rechts verschoven. In beide gevallen heet de top in zijn nieuwe stand F. Ook wordt de top omhoog resp. omlaag geschoven; nu heet de top in beide standen D. Een combinatie van deze verschuivingen leidt tot vier mogelijke standen van de top, die in elk van deze vier standen de naam L krijgt. Ook kan de as gedraaid worden (in positieve of negatieve zin). In beide standen heet deze as nu ANM; hierbij is N het snijpunt met de lijn door F, evenwijdig aan BE.
De combinatie van verschuiving naar boven of beneden, gecombineerd met een draaiing over een positieve of negatieve hoek, leidt tot vier standen van de as, die in elk van deze vier standen DQ heet.
Indien men nu telkens de top dan wel het middelpunt van de betreffende kromme in de beschouwde, nieuwe stand opzoekt, dan kan men, daarvan uitgaande, zonder veel moeite de figuur lezen, indien men de ogen sluit voor de niet relevante letters.

[4.14] Eerst aan het einde van het geval IV (op blz. [309]) wordt meegedeeld dat d de parameter is.

[4.15] Dit tweede geval wordt verdeeld in drie subgevallen:

$$\text{i. } y^2 = dx + f^2, \qquad \text{ii. } y^2 = dx - f^2, \qquad \text{iii. } y^2 = -dx + f^2.$$

De schrijfwijze $y^2 = d(x + \frac{f^2}{d})$ etc. zou verhelderend zijn maar, zoals gezegd, was het gebruik van haakjes nog geen gemeengoed.
Figuur 4.4.2. licht de situatie toe:

4.4.2a

$$y^2 = dx + f^2$$

$$F_1 = (-\frac{f^2}{d}, 0)$$

4.4.2b

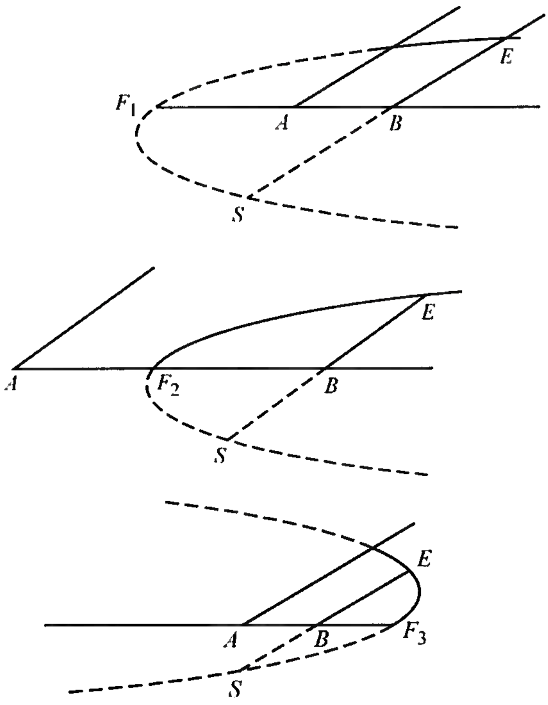
$$y^2 = dx - f^2$$

$$F_2 = (\frac{f^2}{d}, 0)$$

4.4.2c

$$y^2 = -dx + f^2$$

$$F_3 = (\frac{f^2}{d}, 0)$$



FIGUUR 4.4.2

[4.16] De tekst vermeldt ten onrechte $z^2 = dxf^2$ i.p.v. $z^2 = dx \bullet f^2$.

[4.17] Hier wordt het meervoud 'rechten' gebruikt omdat F zowel links als rechts van A kan liggen.

[4.18] Bedoeld zijn de 'naar beneden' gerichte lijnen AM.

[4.19] Nu dus het geval waarin het gaat om de rechten met vergelijking

$$y = -\frac{bx}{a} + c \text{ en } y = -\frac{bx}{a} - c,$$

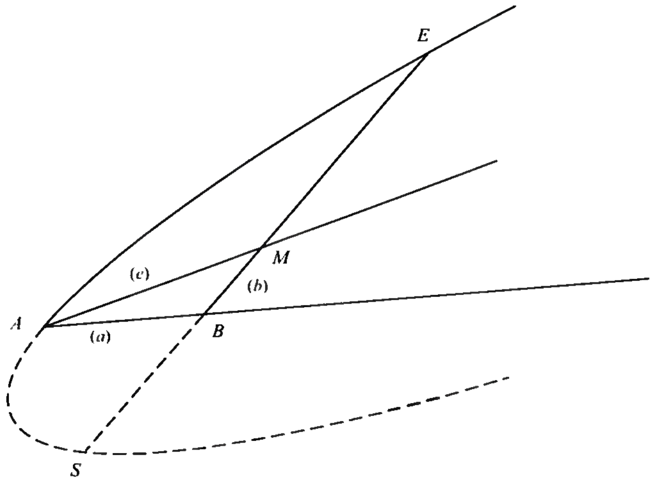
dat wil zeggen de beide rechten DQP.

[4.20] Het betreft nu het geval waarin f^2 wel aanwezig is.

[4.21] Dit lijkt uit de lucht te vallen, maar Jan de Witt vaak werkt toe naar een bepaalde parabool met voorgeschreven vergelijking en daarbij zal zijn keuze van de parameter de juiste blijken te zijn. We lichten dit toe aan de hand van de vergelijking $(y - \frac{bx}{a})^2 = dx$, de andere gevallen gaan analoog.

Indien we de bijbehorende kromme opvatten als parabool met top A, met middellijn AM (zie Figuur 4.4.3), waarbij BME verloopt in de daaraan toegevoegde richting, terwijl p de bijbehorende parameter is, dan geldt voor het punt E op deze parabool:

$$EM^2 = p.AM,$$



FIGUUR 4.4.3

Stellen we de verhouding $AB : BM : AM = a : b : e$, dan geldt dus $AM = \dfrac{ex}{a}$

en (omdat $EM = y - \dfrac{bx}{a}$), $\quad (y - \dfrac{bx}{a})^2 = p\dfrac{ex}{a}$.

Ook geldt $\quad (y - \dfrac{bx}{a})^2 = dx$,

zodat $\quad \dfrac{pe}{a} = d$

en dus ook $\quad p : d = a : e = AB : AM$.

[4.22] Zie het einde van aantekening [4.13]. Nu begint de demonstratio.

[4.23] Voor een goed begrip het volgende. E is niet een vast punt waar alle parabolen doorheen gaan, maar E is het (voor iedere parabool weer andere) punt waar de betrokken parabool de lijn snijdt, die vanuit B geordend is aangebracht op de desbetreffende middellijn.

[4.24] Het gaat om de drie gevallen $y^2 = dx + f^2$, $y^2 = dx - f^2$ en $y^2 = f^2 - dx$.

[4.25] In de figuur op blz. [310] gaat het om het meest rechts gelegen punt F.

[4.26] In het voorgaande zijn drie parabolen beschreven, elk met een top die F genoemd is. Eén top links van A en twee ervan rechts van A. Deze toppen blijven, onafhankelijk van hun ligging, F heten; wij zouden spreken van F_1, F_2 en F_3 (zie figuur bij aantekening 4.15).

Op grond van de definitie van de geconstrueerde parabolen met middellijn AB, parameter d en met als top achtereenvolgens F_1, F_2, F_3 geldt in deze drie gevallen

$$EB^2 = d\,F_1B = d\,(F_1A + AB),$$
$$EB^2 = d\,F_2B = d\,(AB - AF_2),$$
$$EB^2 = d\,BF_3 = d\,(AF_3 - AB).$$

Dit betekent achtereenvolgens

$$y^2 = d\left(\frac{f^2}{d} + x\right),\ y^2 = d\left(x - \frac{f^2}{d}\right) \text{ en } y^2 = d\left(\frac{f^2}{d} - x\right),$$

dus

$$y^2 = f^2 + dx,\ y^2 = dx - f^2 \text{ en } y^2 = f^2 - dx.$$

Dit houdt in dat de abscis (x) en de ordinaat (y) van elk punt op de kromme voldoen aan de bijbehorende vergelijking.

[4.27] Dit laatste geldt voor het 'onderste' punt M. In de tekst staat MBE hier voor een lijnstuk en niet voor het product $MB.\ BE$.

[4.28] Men dient te bedenken dat in de figuur op blz. [313] twee driehoeken ABM voorkomen: boven de abscis-as en daaronder. Voor beide driehoeken geldt $AB:BM = a:b$, met vaste a en b, waardoor beide punten M vastliggen en dus ook de verhouding $AB:AM$. In beide gevallen noemt De Witt deze verhouding $a:e$, maar in het algemeen zal e in beide gevallen verschillende waarden hebben (zoals ook de letter B verschillende punten representeert).
Voor de opmerking over de parameter zie aantekening [4.21].

[4.29] Voor de verschillende punten N zie aantekening [4.13].

[4.30] In het geval van de 'onderste' O.

[4.31] Voor het teken • zie aantekening [4.4].

[4.32] De tekst vermeldt ten onrechte $ME = y - \frac{by}{a}$ en $MCE = y + \frac{by}{a}$.

[4.33] Vanaf dit punt tot blz. [330] worden de gevallen van de eerste kolom sub 3 op blz. [305] behandeld voor zover het om hyperbolen gaat (zie ook aantekening [4.5]). De tweede kolom, die uitsluitend hyperbolen betreft, wordt besproken op blz. [331] tot blz. [332], regel 7 v.o.
De gevallen uit de eerste kolom, die betrekking hebben op ellipsen (c.q. cirkels), worden behandeld op blz. [332], regel 6 v.o. tot blz. [340] regel 10 v.b. (Latijnse tekst).

[4.34] De transversale middellijn heet dus zowel in het 'horizontale' geval, als in het 'verticale' geval FAC.

[4.35] In de linkerkolom gaat het om het punt F op de verticale lijn door A (dat wil zeggen op de drager van de middellijn van de ene hyperbool). In de rechter kolom gaat het op het punt F op de horizontale lijn door A (dat wil zeggen om de drager van de middellijn van de andere hyperbool). Ook hier wordt de top in verschillende ligging steeds met dezelfde letter aangegeven.

[4.36] In het geval van de 'onderste' D en K.

[4.37] In het geval van de 'bovenste' D en K.

[4.38] Het gaat, afgezien van de situatie waarbij $l = g$, om vier gevallen, waarbij steeds voor z geldt

$$z^2 = \frac{lx^2}{g} + f^2 \text{ of } \frac{lz^2}{g} = x^2 - f^2.$$

Hiernaar wordt verwezen als naar het geval waarin f^2 voorzien is van een plusteken of van een minteken.
Hierbij zijn voor z twee mogelijkheden, namelijk

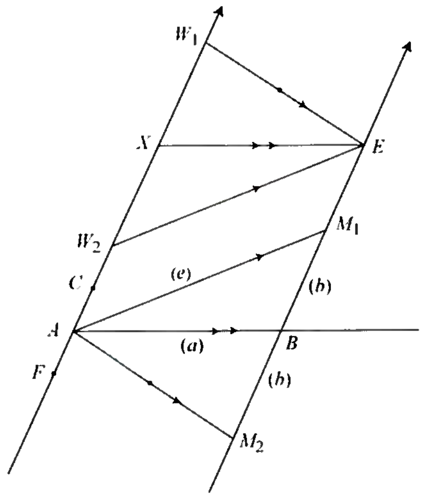
$$z = y \pm \frac{bx}{a}.$$

Wij zullen deze gevallen hier nader toelichten. De gevallen waarin voor z geldt

$$z = y \pm \frac{bx}{a} \pm c$$

gaan analoog en worden behandeld in de tekst aan de hand van de figuur op blz. [325], waar Jan de Witt 23 letters van het alfabet nodig heeft!

In Figuur 4.4.4 geldt het volgende:



FIGUUR 4.4.4

Ook hier gebruikt Jan de Witt vaak één letter voor een bepaald punt op verschillende plaatsen in een tekening. Zo hebben in de figuur op blz. [325] de letters M en W betrekking op lijnen AM resp. EW die in verschillende richtingen verlopen. Dit vereist voor het lezen van de tekst in combinatie met de tekening enige oefening. In deze aantekening zullen we de twee punten M, resp. W, in Figuur 4.4.4 onderscheiden als M_1 en M_2, resp. W_1 en W_2. Wij kunnen dan spreken over FW_1 en FW_2, waar Jan de Witt spreekt over FXW en FW. Bij het eerste lijnstuk wordt namelijk X gepasseerd. Soms ook spreken we over de onderste of bovenste W, resp. M, want zo moet de tekening gelezen worden.

$AB = x$, $BE = y$, $AB : BM : AM = a : b : e$. De a en de b zijn die welke in de vergelijking voorkomen; hierdoor ligt ook de verhouding $AB : AM$ vast, we stellen die op $a : e$, met twee verschillende mogelijkheden voor e (zie aantekening [4.28]).

Voor AM zijn er twee mogelijkheden: boven AB en onder AB.

$AW \parallel BE$, $EW \parallel AM$. Deze laatste eis geeft twee mogelijkheden voor EW, naargelang EW evenwijdig is aan de bovenste of de onderste AM, die we hier aangeven met AM_1 en AM_2.

In beide gevallen geldt

$$EW_1 \text{ (of } EW_2) = EW = AM = \frac{ex}{a}.$$

Voor de onderste W geldt

$$AW = AW_2 = M_1E = EB - BM_1 = y - \frac{bx}{a},$$

terwijl voor de bovenste W, geldt

$$AW = AW_1 = M_2E = EB + BM_2 = y + \frac{bx}{a}.$$

De Witt drukt dit uit door in dit laatste geval te spreken over AXW en MBE: nu moeten X en B 'gepasseerd' worden.

Tenslotte worden op AB en op AW punten F en C gekozen zodanig dat $AC = CF = f$, zodat voor F op AX geldt

$$FW = FW_2 = AW_2 + AF = y - \frac{bx}{a} + f = z + f,$$

$$FW = FXW_1 = AXW_1 + AF = y + \frac{bx}{a} + f = z + f,$$

en analoog $$CW = CW_2 = AW_2 - AC = y - \frac{bx}{a} - f = z - f,$$

$$CXW = CW_1 = AXW_1 - AC = y + \frac{bx}{a} - f = z - f.$$

Later hebben we de volgende producten nodig

$$FWC = FW_2 \,.\, W_2C = z^2 - f^2$$

en $$FXWC = FXW_1 \,.\, W_1XC = z^2 - f^2.$$

Hierna volgt de *descriptio* van de hyperbolen die Jan de Witt in gedachten heeft als de hyperbolen die 'voldoen' aan de vergelijking. Hij blijft echter spreken over 'de' hyperbool, want er is steeds één hyperbool die in één situatie voldoet.

Wij zullen ons hier beperken tot de hyperbolen die voldoen aan de vergelijking

$$z^2 = \frac{lx^2}{g} + f^2,$$

waarbij voor z geldt $z = y \pm \dfrac{bx}{a}$

Daartoe wordt een hyperbool beschreven, gaande door E, met A als middelpunt, transversale middellijn op AW (met lengte $CF = 2f$) en zodanig dat AM de daaraan toegevoegde richting heeft. Twee mogelijkheden dus.

De bijbehorende parameter p (rechte zijde) wordt vastgelegd door de eis dat de verhouding van de transversale zijde tot de rechte zijde is als $a^2l : e^2g$, dus

$$CF : p = a^2l : e^2g, \text{ dat wil zeggen } 2f : p = a^2l : e^2g.$$

Uit Stelling IX van Liber I (blz. [196]) volgt, met behulp van de definitie van de parameter (zie ook aantekening [3.3] bij Liber II), dat

$$EW^2 : FW.WC = p : 2f \qquad \text{i}$$

voor de onderste W,

en $$EW^2 : FXW.\ WXC = p : 2f \qquad \text{ii}$$
voor de bovenste W.

Nu geldt $$EW = \frac{ex}{a},$$

en we zagen al $$FW_2 . W_2 C = FXW_1 . W_1 XC = z^2 - f^2 .$$

Op grond van de aan p gestelde eis, nl. $2f : p = a^2 l : e^2 g$, volgt dan met i en ii, dat
$$\frac{e^2 x^2}{a^2} : (z^2 - f^2) = p : 2f = e^2 g : a^2 l$$

zodat $$\frac{lx^2}{g} = z^2 - f^2,$$

en $$z^2 = \frac{lx^2}{g} + f^2.$$

De kromme heeft dus in beide gevallen de gegeven vergelijking.
Het geval waarin de vergelijking luidt
$$\frac{lz^2}{g} = x^2 - f^2,$$

terwijl $z = y \pm \dfrac{bx}{a}$,

wordt door Jan de Witt op analoge wijze behandeld en leidt tot twee hyperbolen met middelpunt A, transversale middellijn NG langs AM (twee mogelijkheden) en wel zodanig dat $NA = NG = \dfrac{ef}{a}$.

Uit de tekst blijkt nu duidelijk dat de in de bijbehorende descriptio gedefineerde hyperbolen inderdaad aan de gegeven vergelijking voldoen.

[4.39] Jan de Witt spreekt over *de genoemde hyperbool*, maar het gaat in wezen om de twee gevallen, waarbij de middellijn ligt op AW dan wel op AM.

[4.40] Het gaat om de onderste M, gecombineerd met de bovenste W. De Witt drukt dit uit door te spreken over MBE en AXW; de punten B en X moeten dus 'gepasseerd' worden.

[4.41] Het gaat om de bovenste M, gecombineerd met de onderste W. De Witt spreekt dan ook eenvoudigweg over ME en AW.

[4.42] Bedoeld zijn de producten $FWC = FW.WC$ (onderste W) en $FXWC = FXW.\ WXC$ (bovenste W).

[4.43] Het betreft hier slechts een translatie over de afstand OD ter lengte c (naar boven of naar beneden), evenwijdig aan de richting van BE. Het punt D vervult dan de rol die het punt A eerder speelde (zie aantekening [4.38]).

[4.44] De betekenis is duidelijk: van de hoek DWE is het onderste punt W het hoekpunt; bij $DXWE$ is het bovenste punt W het hoekpunt (men gaat eerst via X). Bij DOE is het bovenste punt O het hoekpunt; bij $DOKE$ is het onderste punt O het hoekpunt, daar gaat men via K naar E.

[4.45] Het gaat om vier hyperbolen, waarvan het snijpunt met BE (de lijn door B en $\parallel AD$) de naam E heeft, en met de opening naar rechts. De middelpunten worden in alle gevallen D genoemd en de middellijnen steeds DO. Geeft men deze punten O van boven naar beneden aan met O_1, O_2, O_3, O_4, dan ziet men gemakkelijk in dat

met OE	bedoeld wordt O_1E,
met OKE	bedoeld wordt O_2E (bovenste K),
met OBE	bedoeld wordt O_3E,
met $OKBE$	bedoeld wordt O_4E (onderste K).

In elk van de vier gevallen wordt een beroep gedaan op de stelling:

$$EO^2 : QO.HO = p : 2a \ = a^2g : e^2l.$$

Zie hiervoor ook aantekening [4.38].

[4.46] In dit vierde geval blijft steeds gelden $v = x \pm h$.

[4.47] Zie blz. [320].

[4.48] Met *de daaraan in richting toegevoegde* is het spiegelbeeld bedoeld ten opzichte van de lijn AB. Het drie regels verder volgende 'casu secundo 3', slaat op het tweede geval waarin de plaats een hyperbool is (blz. [320]), en daarvan het derde subgeval (§ 3) op blz. [336].

[4.49] *Descriptio* en *demonstratio* zijn hier niet expliciet aangekondigd, maar het is duidelijk: eerst wordt een hyperbool geconstrueerd en daarna wordt, uit de meetkundige eigenschappen daarvan, afgeleid $xy = f^2$.

[4.50] Met $GHBE$ wordt bedoeld het product $GH.HBE$ en dit slaat op de situatie waarin de asymptoot GH onder AB ligt. Met GHE wordt bedoeld het product $GH.HE$ en dit slaat op de 'bovenste' GH en HE.

[4.51] Indien het gaat om het linkerpunt I; in IB is het rechterpunt I bedoeld.

[4.52] Ook hier gaat het om het linkerpunt I en met $IABE$ wordt bedoeld het product $IAB.BE$.

[4.53] Met $KGHE$ wordt bedoeld het product $KGH.HE$ en dit slaat op de situatie waarin de asymptoot KGH boven AB ligt en K het linkerpunt daarop is.

[4.54] Met $KGHBE$ wordt bedoeld het product $KGH.HBE$ en dit slaat op de situatie waarin de asymptoot KGH onder AB ligt en K het linkerpunt daarop is.

[4.55] Hier komt Jan de Witt terug op de resterende formules sub 3 op blz. [305]. Op blz. [318] tot [330] heeft hij de gevallen van die formules behandeld waarin geldt $y^2 = \dfrac{lx^2}{g} \pm f^2$ etc. en toonde hij aan dat het daarbij om hyperbolen gaat.

Nu stelt hij de volgende gevallen aan de orde, waarbij het om ellipsen gaat:

$$y^2 = -\frac{lx^2}{g} + f^2,\ z^2 = -\frac{lx^2}{g} + f^2,\ y^2 = -\frac{lv^2}{g} + f^2,\ z^2 = -\frac{lv^2}{g} + f^2.$$

Aangezien l en g positief ondersteld zijn, kan f^2 niet voorzien zijn van het minteken.

Ook nu gaat hij over op $\dfrac{ly^2}{g} = -x^2 + f^2$ etc.

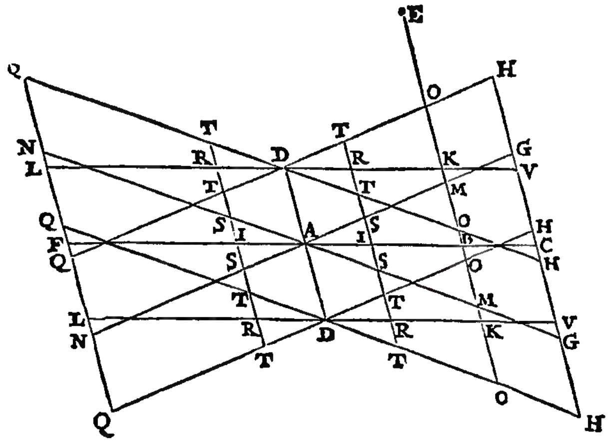
[4.56] Zie aantekening [3.38]

[4.57] Hier eindigt de *descriptio*. Het bewijs dat de coördinaten van de punten op deze kromme inderdaad voldoen aan de vergelijking waarom het gaat (de *demonstratio*) volgt nu zonder nadere aankondiging.

[4.58] Bij *KBE* gaat het om het onderste punt *K*, bij *KE* om het bovenste punt *K*.

[4.59] Ook hier wordt een beroep gedaan op Stelling XII in Liber I.

[4.60] We lichten deze situatie toe voor het geval waarin $z = y - \frac{bx}{a}$. Het geval $z = y + \frac{bx}{a}$ verloopt analoog.



FIGUUR 4.4.5

In de figuur op blz. [337] (Figuur 4.4.5) geldt, voor de bovenste *M* en *G* en onderste *N*,

$$AB : BM : MA = a : b : e,\ AF = AC = f \text{ en } FN \parallel CG \parallel BE,$$

zodat
$$NA = AG = \frac{ef}{a},\ NM = \frac{ef}{a} + \frac{ex}{a},\ MG = \frac{ef}{a} - \frac{ex}{a}.$$

We construeren nu met *A* als middelpunt, en *NG* als transversale middellijn een ellips met zodanige parameter *p*, dat geldt

$$2f : p = e^2 l : a^2 g.$$

Op grond van Stelling XII in Liber I (zie ook aantekening [3.5]) geldt nu voor het punt *E* op deze ellips (*EM* geordend aangebracht op de middellijn *NG*):

$$EM^2 : NM.\ MG = p : 2f = a^2 g : e^2 l.$$

Aangezien
$$EM = y - \frac{bx}{a} = z,$$

geldt
$$e^2 l\, z^2 = a^2 g \left(\frac{ef}{a} + \frac{ex}{a}\right)\left(\frac{ef}{a} - \frac{ex}{a}\right),$$

zodat
$$\frac{lz^2}{g} = f^2 - x^2.$$

[4.61] Indien het gaat om het onderste punt *D*.

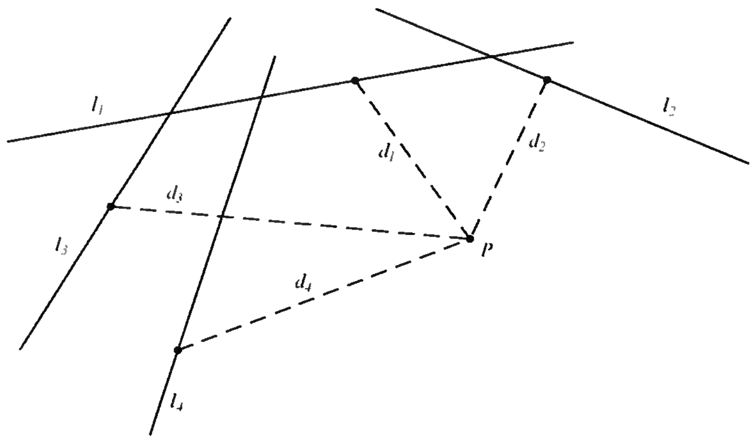
[4.62] Einde *descriptio*, begin *demonstratio*.

5

Appendix

1. Achtergronden van het probleem van Pappus

De eerste vermelding van het vraagstuk dat later als het probleem van Pappus de geschiedenis is ingegaan, vinden we bij Apollonius in zijn inleiding tot de *Conica* (I,1) waar hij schrijft dat Euclides het probleem van de plaats (locus) m.b.t. drie of vier lijnen niet voldoende had uitgewerkt en dat wat deze gevonden had, nog niet eens bijzonder geslaagd was.
Apollonius doelt hierbij op het (thans verloren) werk over kegelsneden van de hand van Euclides. Als verklaring voor dit tekortschieten van Euclides voert Apollonius aan dat Euclides niet beschikte over twee relevante fundamentele stellingen die Apollonius zelf gevonden en bewezen had. Welke dit zijn, zullen we verderop zien.
Het bedoelde probleem van de plaats van drie of vier lijnen kan, zoals we al in de inleiding zagen, in simpele vorm als volgt geformuleerd worden. Zie Figuur 5.1.1.



FIGUUR 5.1.1

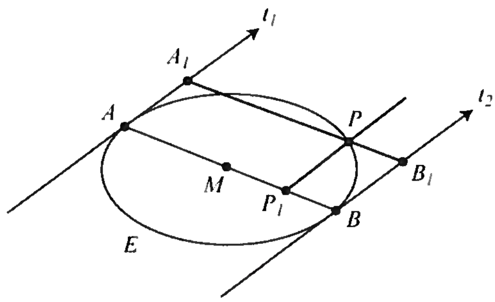
In het plattte vlak zijn drie of vier rechte lijnen $l_1, l_2, l_3, (l_4)$ gegeven. Men vraagt nu naar de verzameling van de punten P die de eigenschap hebben dat de afstanden $d_1, d_2, d_3, (d_4)$ van P tot resp. $l_1, l_2, l_3, (l_4)$ voldoen aan

i. $d_1 d_2 : d_3^2 \ = \text{constant}$ (in het geval van drie lijnen),

ii. $d_1 d_2 : d_3 d_4 = \text{constant}$ (in het geval van vier lijnen).

Voor deze afstanden kan men de loodrechte afstanden nemen, maar ook afstanden in een bij elke rechte l_i afzonderlijk bepaalde richting. Het is duidelijk dat deze keuze niets verandert aan de aard van het probleem. Reeds nu vermelden we dat de bedoelde plaatsen kegelsneden zullen blijken te zijn.

Een voor de hand liggende vraag is "hoe kwam men er toe zo'n probleem te stellen?"
We kunnen daarvan al een voorlopige indruk krijgen als we ons beperken tot een situatie waarin een ellips de oplossing is; hierbij zullen we ons bedienen van onze moderne notatie.
In Figuur 5.1.2 is AB een middellijn van de ellips E, met lengte $2a$; t_1 en t_2 raken in A en B aan de ellips, P is een willekeurig punt daarop en PP_1 is evenwijdig met t_1 en t_2.



FIGUUR 5.1.2

Reeds in de Oudheid gold als kenmerkende eigenschap van een ellips

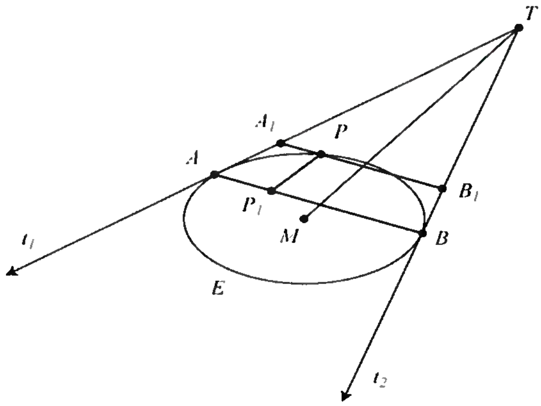
$$PP_1^2 : AP_1.P_1B = \text{constant.}$$

De grootte van deze constante is $b^2 : a^2$ waarbij $2a$ de lengte is van middellijn AB en $2b$ de lengte van de daaraan toegevoegde middellijn.
Ook Jan de Witt leidde deze eigenschap af uit zijn definitie van ellips en gebruikte deze daarna als kenmerk voor de ellips (*Liber Primus*, St. XII, prop. 13).
Trekt men nu door P de lijn $A_1B_1 \parallel AB$, dan geldt ook

$$PP_1^2 : PA_1.PB_1 = \text{constant,}$$

zodat de punten op de ellips E de oplossing zijn voor het drielijnenprobleem voor deze t_1, t_2 en AB, en met de richtingen van AB en t_1 als bijbehorende richtingen.
Men kan deze situatie generaliseren (zie Figuur 5.1.3). Hier is AB een willekeurige koorde van de ellips E met middelpunt M; t_1 en t_2 raken de ellips in A en B; hun snijpunt is T. Door een willekeurig punt P op de ellips trekt men nu een lijn $A_1B_1 \parallel AB$, en PP_1 evenwijdig aan de middellijn door T.
Men kan dan bewijzen dat geldt

$$PP_1^2 : PA_1.PB_1 = \text{constant.}$$

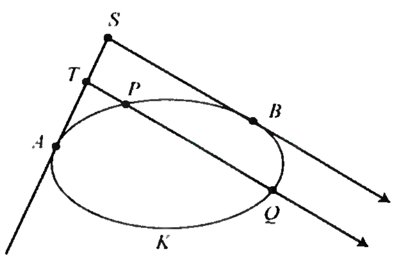


FIGUUR 5.1.3

De ellips E is dus een oplossing voor het drielijnenprobleem voor deze t_1, t_2 en AB, en met de richtingen van AB en TM als bijbehorende richtingen.
Omgekeerd is het niet moeilijk om aan te tonen dat bij drie gegeven lijnen en bijbehorende richtingen de oplossing van het drielijnenprobleem een ellips of een hyperbool is (Knorr [43], blz. 122).

De bewijzen die Apollonius hiervoor gaf en de eventuele bijdragen van Euclides zijn niet overgeleverd, zodat we aangewezen zijn op reconstructies. De belangrijkste hiervan zijn gegeven door Heath [30], Knorr [43] en Zeuthen [70], [71].

De twee hierbij benodigde relevante fundamentele stellingen, waarover wij reeds spraken, vinden we bij Apollonius als Stelling III, 16 en III, 17 van de *Conica*. Wij zullen deze hier reproduceren omdat zij niet zo algemeen bekend zijn, maar wel generalisaties zijn van twee overbekende stellingen voor cirkels. Zij komen neer op het volgende.



FIGUUR 5.1.4

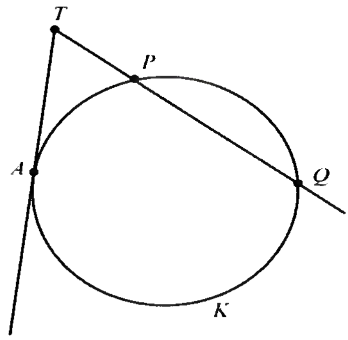
Conica III, 16 (zie Figuur 5.1.4).
Wanneer men vanuit het punt S de raaklijnen SA en SB aan de kegelsnede K trekt, op SA het punt T kiest, en door T een lijn evenwijdig aan SB trekt, die de kegelsnede snijdt in P en Q, dan geldt

$$TA^2 : TP.TQ = SA^2 : SB^2.$$

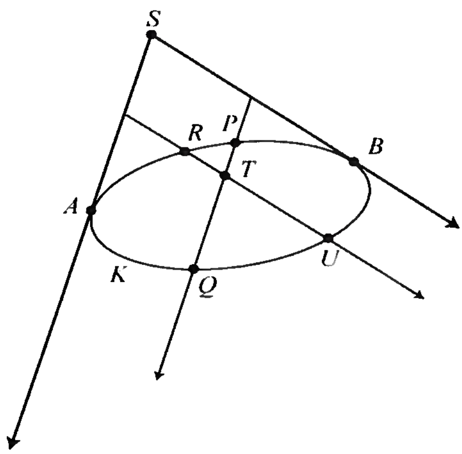
Indien men voor K een cirkel neemt (zie Figuur 5.1.5), dan geldt SA = SB en dus

$$TA^2 : TP.TQ,$$

ongeacht de richting van TPQ.



FIGUUR 5.1.5

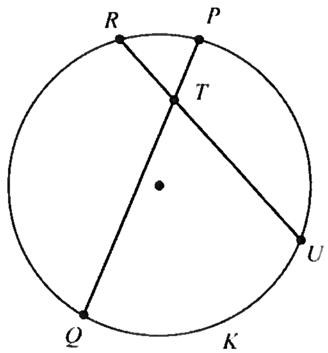


FIGUUR 5.1.6

Conica III, 17 (zie Figuur 5.1.6).
Wanneer men vanuit het punt S de raaklijnen SA en SB aan de kegelsnede K trekt, en door het punt T (binnen of buiten K) de koorden PTQ en RTU trekt, evenwijdig respectievelijk aan SA en SB, dan geldt

$$PT.TQ : RT.TU = SA^2 : SB^2.$$

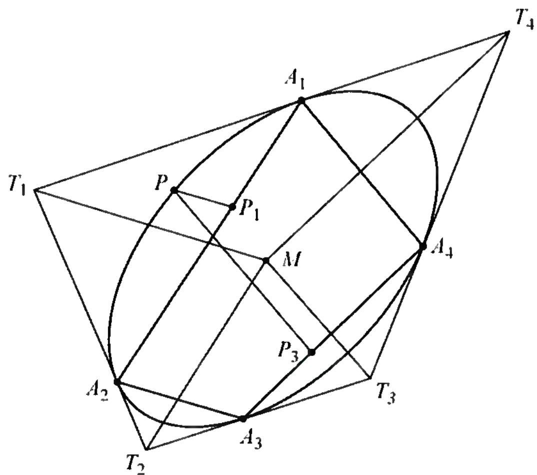
Indien men voor K een cirkel neemt (zie Figuur 5.1.7), dan geldt weer $SA = SB$ en dus $$PT.TQ = RT.TU.$$



FIGUUR 5.1.7

De oplossing van het drielijnenprobleem is door Heath en Knorr op verschillende wijzen gereconstrueerd (Heath [30], blz. 122, Knorr [43], blz. 121-122), maar Heath leidt daaruit een oplossing af voor het vierlijnenprobleem, waarbij Knorr zich aansluit (Heath [30], blz. 123-125).

Allereerst toont Heath aan dat elke kegelsnede een oplossing is voor een vierlijnenprobleem wanneer het gaat om een ingeschreven vierhoek. Dit doet hij door de oplossing van het drielijnenprobleem viermaal toe te passen.



FIGUUR 5.1.8

Daartoe bezien we Figuur 5.1.8. In dit voorbeeld is de vierhoek $A_1A_2A_3A_4$ ingeschreven in de ellips E met middelpunt M; de raaklijnen in A_1, A_2, A_3, A_4 snijden elkaar in T_1, T_2, T_3, T_4, en P is een willekeurig punt op E.
Door P trekken we nu een lijn evenwijdig aan T_1M, die A_1A_2 snijdt in P_1. Op analoge wijze bepalen we P_2 op A_2A_3, P_3 op A_3A_4 en P_4 op A_4A_1, d.w.z. PP_2 is evenwijdig aan T_2M etc. Het gaat nu om het vierlijnenprobleem waarbij de dragers van de zijden van de koordenvierhoek $A_1A_2A_3A_4$ de gegeven lijnen zijn en de zojuist gedefinieerde richtingen van PP_1, PP_2, PP_3 en PP_4 de bij A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 en A_4A_1 behorende richtingen. Door viermaal het resultaat van het drielijnenprobleem toe te passen, nl. op de configuraties $T_1A_1A_2, T_2A_2A_3, T_3A_3A_4$ en $T_4A_4A_1$ (steeds m.b.t. het punt P op E), vindt men na enig rekenwerk

$$PP_1.PP_3 : PP_2.PP_4 = \text{constant.}$$

Hiervoor zij verwezen naar Heath ([30], blz. 123 t/m 125).

Het omgekeerde van dit probleem, dus het eigenlijke probleem van Pappus, namelijk de constructie van de kromme die bij een gegeven viertal lijnen, vier richtingen en een gegeven verhouding, het probleem van Pappus oplost, is niet eenvoudig.
Heath en Knorr schetsen de methode van Zeuthen, die er allereerst van uitgaat dat de vier gegeven lijnen een trapezium insluiten. Deze situatie wordt gezien als een generalisatie van het drielijnenprobleem; de bij dit drielijnenprobleem optredende koorde wordt dan opgevat als een bijzonder geval van een trapezium, en wel een met samenvallende evenwijdige zijden. Vervolgens wordt dan de overgang gemaakt naar een willekeurige vierhoek.
Hierop kunnen wij hier niet nader ingaan. De lezer vindt alle details bij Heath ([30] en Knorr ([43]).

Een mogelijke generalisatie tot meer dan vier lijnen ligt voor de hand en wordt al door Pappus zelf geopperd (*Collectio* vii, 38-40; ed. Hultsch blz. 680, en Y. Thomas, dl. II, blz. 601- 603).
In het geval van vijf lijnen, $l_1, l_2, ..., l_5$, gaat het om de afstanden $d_1, d_2, ..., d_5$. Pappus beschouwt nu de twee parallellepipeda die ingesloten worden door resp. d_1, d_2, d_3 en door d_4, d_5 en een willekeurig gekozen lijnstuk a. De eis wordt nu dat de verhouding van hun inhouden, nl. $d_1d_2d_3 : d_4d_5a$ constant is.
In het geval van zes lijnen gaat het om zes afstanden, $d_1, d_2, ..., d_6$. De eis wordt nu dat de verhouding $d_1d_2d_3 : d_4d_5d_6$ constant is.
Wanneer men met meer dan zes lijnen te maken heeft, dan ontstaat een probleem, dat door Pappus zeer duidelijk onderkend wordt. Men krijgt dan te maken met producten van vier of meer lijnen, en deze hebben in de meetkundige algebra van de Grieken geen betekenis, zij stellen immers geen grootheid voor, hoewel, zegt Pappus, "sommige moderne schrijvers onderling hebben afgesproken hierover te spreken, al zeggen zij hier niets duidelijks mee." Wellicht doelt hij hier op Hero (3^{e}

eeuw A.D.) en zijn formule voor de oppervlakte van een driehoek, die wij kennen als de *s*-formule, waarin het product van vier lijnstuken voorkomt. Pappus gaat niet verder dan acht lijnen en om het probleem van de verhouding van producten van vier lijnstukken te omzeilen spreekt hij niet van de verhouding $d_1d_2d_3d_4 : d_5d_6d_7d_8$, maar van de verhouding die 'samengesteld' is uit de verhoudingen $d_1 : d_5, d_2 : d_6, d_3 : d_7$ en $d_4 : d_8$.
Dit vereist toelichting, maar kort gezegd gaat het hier om de vermenigvuldiging van reële getallen.
Het begrip 'samenstelling' van verhoudingen komt voor het eerst voor bij Euclides (*Elementa*, VI, 23.) In feite bewijst hij daar dat de oppervlakten van twee parallellogrammen met een gemeenschappelijke hoek zich verhouden als de producten van de zijden *a* en *b*, resp. *c* en *d*, om die hoek, dus als *ab* tot *cd*.
Hij formuleert dit aldus:
"de oppervlakten van parallellogrammen met een gemeenschappelijke hoek hebben een verhouding die samengesteld is uit de verhoudingen van de overeenkomstige zijden."
Wanneer wij de verhouding van gelijksoortige grootheden *x* en *y* voor het gemak even aangeven met $\frac{x}{y}$ en de operatie 'samenstellen' van verhoudingen met het symbool * , dan zegt Euclides in feite dat $\frac{ab}{cd} = \frac{a}{c} * \frac{b}{d}$.
Dit begrip van samengestelde verhoudingen wordt door Euclides stilzwijgend bekend verondersteld bij het bewijs van deze stelling.
Dijksterhuis ([18], deel II, blz. 83) geeft een reconstructie van de definitie hiervan. Hieruit volgt dan:
Indien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ een rij gelijksoortige grootheden is, dan zegt men dat de verhouding $\frac{a_1}{a_n}$ samengesteld is uit de verhoudingen $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n}$, m.a.w.

$$\frac{a_1}{a_n} = \frac{a_1}{a_2} * \frac{a_2}{a_3} * \ldots * \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Uit deze definitie leidt men eenvoudig af dat

$$\frac{abc}{xyz} = \frac{a}{x} * \frac{b}{y} * \frac{c}{z}.$$

Beschouwt men immers de rij *abc, xbc, xyc, xyz*, dan geldt volgens de definitie van samenstellen van verhoudingen dat

$$\frac{abc}{xyz} = \frac{abc}{xbc} * \frac{xbc}{xyc} * \frac{xyc}{xyz} = \frac{a}{x} * \frac{b}{y} * \frac{c}{z}.$$

Zo kan men ook de verhouding van twee producten, elk van meer dan drie lijnstukken, zien als samengesteld uit de verhoudingen van telkens twee lijnstukken. Het probleem van de betekenis van zo'n product van meer dan drie lijnstukken blijft echter bestaan.

Pappus (*Collectio*, vii, 928) bewees meetkundig dat $\frac{ab}{cd} = \frac{a}{c} * \frac{b}{d}$.

Zoals we in de inleiding al zagen, zou Descartes zich later ontdoen van de problemen die de Grieken hadden met de interpretatie van producten van meer dan drie lijnstukken, door de invoering van een lengte-eenheid 1.Voor details verwijzen we de lezer naar paragraaf 5 van de inleiding.

2. Descartes' beschouwing over vlakke krommen

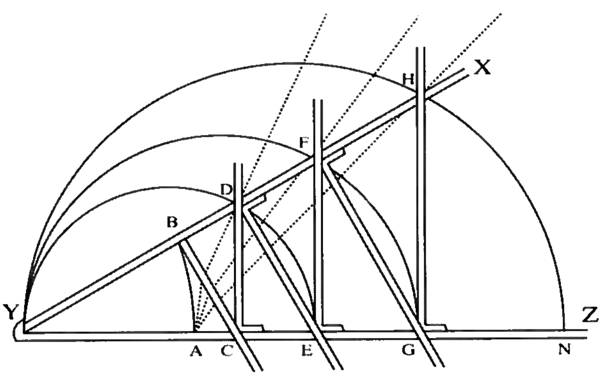
In de klasieke oudheid, we vermeldden dit al eerder, verdeelde men de vlakke krommen in drie klassen: vlakke plaatsen (*loci plani*), d.w.z. rechte lijnen en cirkels, ruimtelijke plaatsen (*loci solidi*), d.w.z. kegelsneden m.u.v. de cirkel en tenslotte de *loci lineares,* waartoe men alle overige vlakke krommen rekende, zoals bijv. de cissoïde, conchoïde, quadratrix en spiraal. Descartes maakte er bezwaar tegen deze laatste krommen mechanisch te noemen op grond van het feit dat zij met behulp van allerlei instrumenten getekend moesten worden. Dat geldt immers ook voor een rechte en een cirkel, waarvoor men liniaal en passer nodig heeft.

Hij stelt voor via een nieuw axioma nieuwe krommen in de meetkunde toe te laten en wel aldus:

Twee of meer krommen kunnen zodanig bewogen worden, de een door de ander, dat door hun snijpunt andere krommen ontstaan.

Anders gezegd: toelaatbaar zijn in de meetkunde krommen die beschreven kunnen worden door een continue beweging of door opeenvolgende continue bewegingen, waarbij iedere beweging geheel bepaald wordt door de voorafgaande.

Descartes geeft ter verduidelijking als eerste voorbeeld een kromme die ontstaat door de bewegingen van een aantal stangen waarvan iedere stang de volgende voortbeweegt. Figuur 5.2.1 geeft de bedoeling weer.

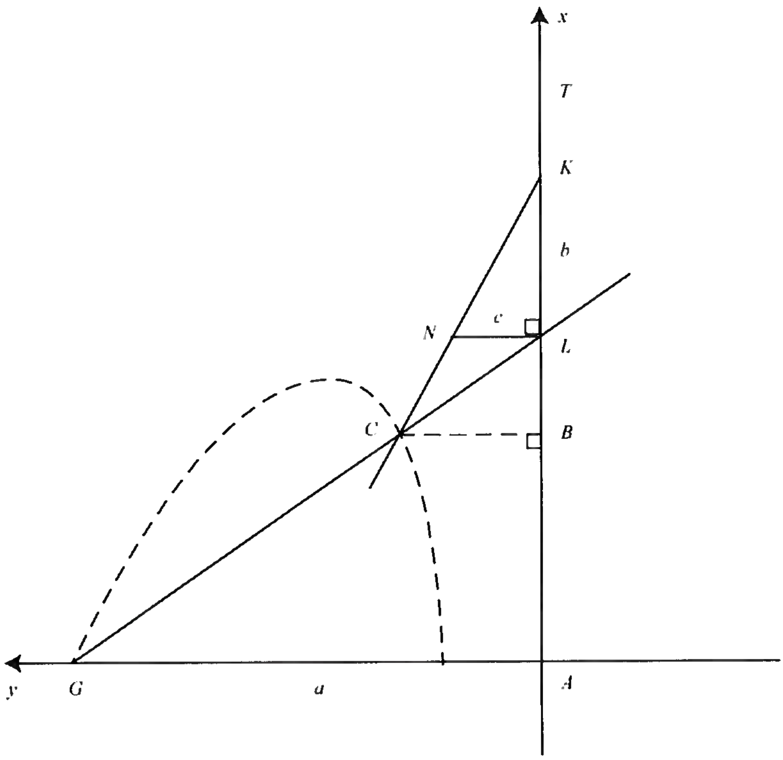


FIGUUR 5.2.1

De liniaal YX draait om het punt Y, YB heeft een vaste lengte. De stang BC staat loodrecht op YX en wanneer de liniaal YX om Y draait, verschuift BC de stang CD die loodrecht staat op YZ. CD verschuift op zijn beurt de stang DE die loodrecht staat op YX, waardoor dan DE de stang EF (loodrecht op YZ) verschuift, enz.. Het snijpunt van de laatste stang, GH, met de draaiende liniaal YX beschrijft dan een kromme zoals Descartes bedoelde: deze ontstond door opvolgende continue bewegingen.

Descartes merkt slechts op dat de baan van B een cirkel is en dat de banen van D, F en H steeds 'complexer' zijn, zonder hun vergelijking af te leiden. Stelt men echter $YB = a$, $YG = x$ en $GH = y$, dan vindt men na enige berekening voor de baan van H de vergelijking $x^{12} = a^2(x^2 + y^2)^5$. Wij zullen op dit voorbeeld niet nader ingaan, maar verwijzen hiervoor naar *Géométrie* blz. 317 en 318 en naar [16] en [52].
Hoewel Descartes hier geen vergelijkingen opstelt, maakt hij wel de volgende opmerking, met een zin die wel tot de allerbelangrijkste van de wiskundeliteratuur gerekend kan worden.
Ie ne sçache rien de meilleur que de dire que tous les poins, de celles qu'on peut nommer Geometriques, c'est a dire qui tombent sous quelque mesure précise & exacte, ont necessairement quelque rapport a tous les poins d'une ligne droite, qui peut estre exprimé par quelque equation, en tous par une mesme.
In vertaling:
Ik kan het niet beter uitdrukken dan door te zeggen dat alle punten op deze [krommen] die men meetkundige kan noemen, d.w.z. die op enigerlei wijze een nauwkeurige en exacte bepaling toelaten, noodzakelijkerwijze een zekere betrekking hebben tot alle punten van een rechte lijn, welke betrekking uitgedrukt kan worden door een of andere vergelijking die voor alle punten dezelfde is.

Het gaat hierbij om de betrekking tussen de abscis en de ordinaat van elk punt op de betreffende kromme. Hoewel Descartes dit hier niet expliciet zegt, blijkt uit het vervolg dat de bedoelde betrekking een algebraïsche vergelijking moet zijn. Voor hem zijn dus toelaatbare krommen algebraïsche krommen. Krommen die niet hieronder vallen, werden mechanische krommen genoemd. Later zou Leibniz het onderscheid algebraïsch versus transcendent maken.
Direct aansluitend introduceert Descartes een indeling van meetkundige krommen in, wat hij noemt, *genres*; wij zullen spreken over soorten of klassen.
Tot de eerste soort behoren de krommen voorgesteld door een vergelijking van de graad 1 of 2, dus rechten, cirkels, parabolen, hyperbolen en ellipsen. Tot de tweede soort behoren de krommen met vergelijking van de graad 3 en 4.
In het algemeen: elke soort bestaat uit krommen met vergelijkingen van oneven graad en de daarop volgende even graad. Descartes was daarbij geïnspireerd door het feit dat een vergelijking van de graad vier oplosbaar is door middel van een resolvente van de graad drie en door zijn onjuiste vermoeden dat een vergelijking van de graad zes oplosbaar is door middel van een vergelijking van de graad vijf, enz.
Hierna geeft hij een tweede voorbeeld van het voortbrengen van een kromme op een aanvaardbare wijze. (*Géométrie*, blz. 320-322). Deze methode is veel algemener dan die bij het eerste voorbeeld en neemt een belangrijke plaats in de *Géométrie* in.
In Figuur 5.2.2 is NKL een gegeven hoek; $KL = b$, NL en GA staan loodrecht op de drager AT van KL; $NL = c$, $GA = a$. Een liniaal gaat door het vaste punt G en door het beweeglijke punt L op AT; deze liniaal draait om het punt G en sleept daarbij KL langs diens drager AT. Het gaat nu om de baan van het snijpunt C (op het verlengde van KN) met de roterende liniaal.



FIGUUR 5.2.2

Descartes kiest de drager AT van KL als abscis-as, met A als beginpunt. En passant merkt hij op (zonder bewijs) dat deze keuze de graad van de kromme die de baan van het punt C beschrijft, niet beïnvloedt.
Als ordinaatrichting kiest hij de richting van AG. Abscis en ordinaat x en y van C zijn dus respectievelijk AB en BC waarbij geldt dat $BC \parallel AG$.

Men ziet dan direct dat

$$CB : BK = NL : LK = c : b,$$

Dus $$BK = \frac{by}{c},$$

zodat $$BL = BK - LK = \frac{by}{c} - b$$

en $$AL = AB + BL = x + \frac{by}{c} - b\,.$$

Ook geldt $$CB : BL = GA : AL,$$

dus $$y:(\frac{by}{c}-b)=a:(x+\frac{by}{c}-b),$$

waaruit volgt $$y^2=cy-\frac{cxy}{b}+ay-ac.$$

Hieruit blijkt dat het om een kromme van de eerste soort gaat. Descartes deelt zonder meer mede dat het een hyperbool betreft. Overigens zij opgemerkt dat deze methode in principe ook gebruikt is door Jan de Witt om beide takken van een hyperbool te genereren en daaruit op zuiver meetkundige wijze een groot aantal eigenschappen daarvan af te leiden (*Liber Primus*, blz. [178] – [182]).
Neemt men voor de bewegende kromme een halve cirkel met middelpunt L en straal R, dan krijgt men een kromme met vergelijking

$$x^2y^2+y^2(a-y)^2=R^2(a-y)^2.$$

Kiest men nu $a-y$ als nieuwe ordinaat (d.w.z. keert men op de ordinaat-as de richting om en neemt men G als oorsprong) en verwisselt men vervolgens abscis en ordinaat, dan krijgt men de vergelijking van de conchoïde in de bekende vorm

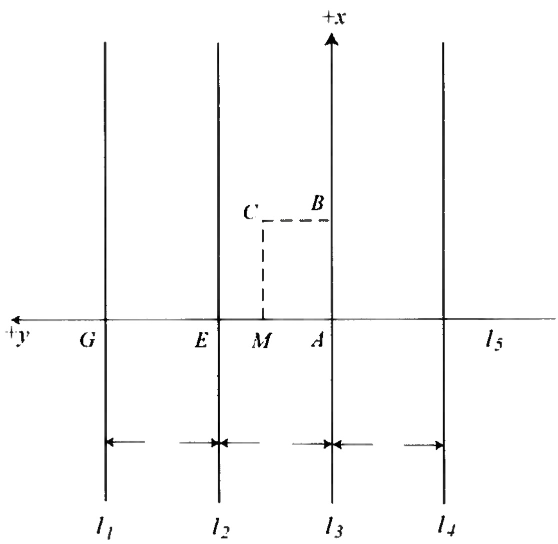
$$(x-a)^2(x^2+y^2)=R^2x^2.$$

Descartes deelt echter zonder meer mee dat deze keuze van de bewegende kromme tot een conchoïde leidt.
Indien men in plaats van de hoek NKL voor de voortschuivende kromme een parabool kiest, dan ontstaat een kromme van de derde graad die bekend staat als de parabool van Descartes en ook wel trident of drietand genoemd wordt. Deze speelt een belangrijke rol bij het probleem van Pappus voor vijf lijnen en bij het oplossen van vergelijkingen van de graad vijf of zes. Op deze kromme komen we nog terug in Appendix §3.
Descartes trekt nu enkele conclusies die niet alle houdbaar bleken. Allereerst zegt hij dat uit berekening volgt dat een kromme van de eerste soort op bovengenoemde wijze een kromme van de tweede soort genereert en dat in het algemeen een kromme van een zekere soort altijd een kromme genereert die tot de daaropvolgende soort behoort.
Fermat weerlegde deze bewering met een eenvoudig voorbeeld. De kubische parabool met vergelijking $y^3=x$, en dus behorende tot de tweede soort, genereert een kromme met vergelijking $(y^3-a)(b-y)=xy$ (a en b afhankelijk van de keuze van de liniaal), die van de graad vier is en tot dezelfde soort behoort.
Wel merkt hij terecht op dat alle zo ontstane krommen een algebraïsche vergelijking hebben. Zonder bewijs gaat hij ervan uit dat het omgekeerde ook geldt. Dit is wel juist, maar werd eerst in de 19^e eeuw bewezen (zie. [5]).
Vervolgens brengt Descartes zijn classificatie in verband met de oplossingen van het Pappusprobleem. Hij toonde al aan dat in het geval van drie of vier lijnen de oplossing een kromme van de graad twee, dus van de eerste soort is. Analoog behoren oplossingen van het Pappusprobleem met hoogstens acht lijnen tot de eerste of tweede soort en in de situatie met hoogstens twaalf lijnen komt men op oplossingen die tot de derde of lagere soort behoren. Dan trekt hij echter een voorbarige conclusie. Men kan met zó veel verschillende rechten in het platte vlak

zó veel verschillende Pappusproblemen stellen, die elk een algebraïsche kromme tot oplossing hebben, dat Descartes zich laat verleiden tot de uitspraak dat omgekeerd elke toelaatbare kromme de oplossing is van een of ander Pappusprobleem. Newton (1642 – 1747) zou deze bewering weerleggen.
Resumerend: als we de verzameling algebraïsche krommen voorstellen door A, die van de oplossingen van Pappusproblemen door P en die van de krommen die door een combinatie van continue bewegingen worden voortgebracht door C, dan geldt $A = C, P \subset A, A \neq P$.
Na deze excursie over de classificatie van vlakke krommen gaat Descartes verder met het probleem van Pappus voor vier lijnen en werkt dit volledig uit. Hierbij komt hij tot de conclusie dat in dit geval de oplossingen kegelsneden zijn, die hij gedetailleerd beschrijft. De berekeningen die tot zijn conclusies leiden vindt de lezer samengevat in de Inleiding. Wij zullen op deze plaats verder gaan met Descartes' behandeling van het probleem van Pappus voor vijf lijnen, waarmee hij zijn beschouwingen over het probleem van Pappus besluit.

3. Descartes' behandeling van het probleem van Pappus voor vijf lijnen

Het eerste geval dat Descartes aan de orde stelt is de situatie waarin alle vijf lijnen evenwijdig zijn. Zonder meer merkt hij op dat in dit geval de gezochte punten op een of meer rechte lijnen liggen. Voor ons is het direct in te zien dat deze rechten afhangen van de oplossingen van een derdegraadsvergelijking met reële coëfficiënten.



FIGUUR 5.3.1

Vervolgens beschouwt hij de situatie waarin het gaat om vier equidistante lijnen l_1, l_2, l_3, l_4 met onderlinge afstand a, terwijl de vijfde lijn, l_5, daar loodrecht op staat (zie Figuur 5.3.1). Van de mogelijkheden voor de plaats van de afstanden d_i in de formule kiest Descartes

$$d_1 d_2 d_4 = a d_3 d_5.$$

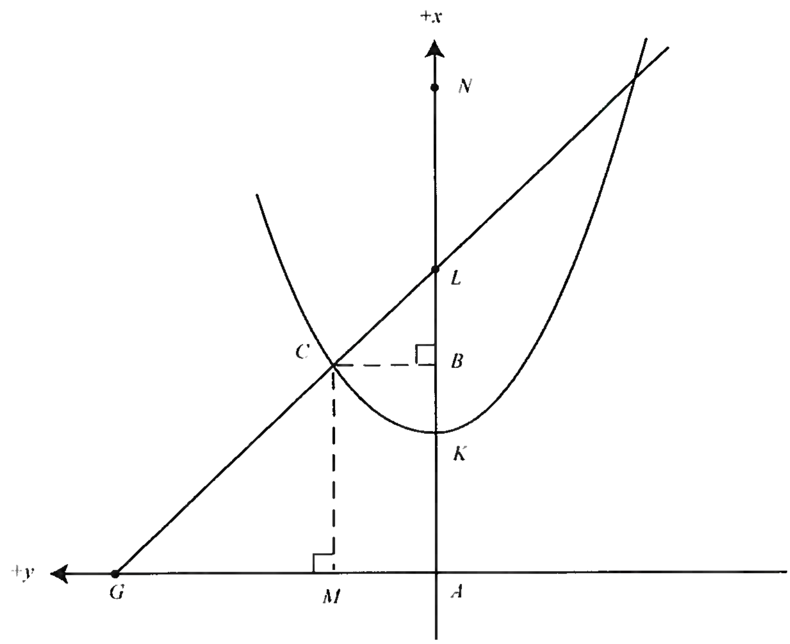
Met de eerder gemaakte afspraken over de abscis x en ordinaat y van C geldt dan

$$(2a - y)(a - y)(a + y) = axy.$$

De vergelijking van de plaats laat zich dus schrijven als

$$y^3 - 2ay^2 - a^2 y + 2a^3 = axy.$$

Het zal blijken dat deze plaats de eerder genoemde parabool van Descartes oftewel de drietand (trident) is.



FIGUUR 5.3.2

Om dit aan te tonen beschouwt Descartes de situatie in Figuur 5.2.2 en kiest in plaats van de hoek *NKL* een dalparabool met as langs *AN*, top in *K* en met parameter *a* (zie Figuur 5.3.2). Het punt *L* op *AN* ligt binnen de parabool op vaste afstand *a* van *K*. De liniaal door *G* (*GA* = 2*a*) en *L*, draait ook nu weer om *G* en sleept daarbij *L* langs *AN*. Het punt *L* neemt daarbij de parabool mee. Het gaat ook nu weer om de baan van het snijpunt *C* van de drager van *GL* met de schuivende parabool. Steeds geldt dat *CB* en *CM* loodrecht staan op respectievelijk *AN* en *AG*.

In deze situatie geldt

$$GM : CM = CB : LB,$$

zodat $\quad (2a - y) : x = y : LB,$

dus $LB = \dfrac{xy}{2a-y}.$

Ook geldt $BK = LK - LB,$

dus $BK = a - \dfrac{xy}{2a-y}.$

Op grond van de definitie van de parabool geldt

$$CB^2 = aBK,$$

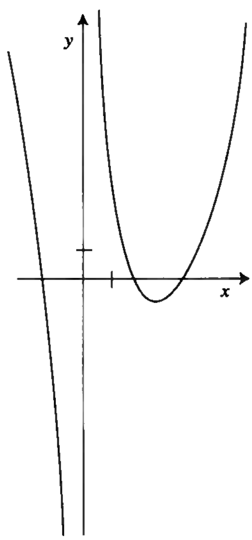
en dus $y^2 = a\left(a - \dfrac{xy}{2a-y}\right),$

oftewel $y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy.$

De vergelijking van deze kromme is dus dezelfde als die van de gezochte plaats, die trident genoemd werd.
Het is eenvoudig in te zien dat in het algemene geval, waarin $LK = a$, $AG = b$ en de parabool als parameter p heeft, voor de geconstrueerde kromme geldt

$$y^3 - by^2 - pay + pab = pxy.$$

Tenslotte merkt Descartes op dat men C ook kan kiezen op de rechterhelft van de parabool en ook op de bijbehorende bergparabool.
Een tekening van de door hem geïntroduceerde trident geeft hij niet; wij voegen hier een schets toe voor het geval dat $a = 2$ (Figuur 5.3.3).



FIGUUR 5.3.3

Hierna komt terloops de situatie aan de orde waarin de lijnen l_1, l_2, l_3, l_4 niet equidistant zijn en niet loodrecht staan op l_5, terwijl de lijnen die vanuit C getrokken worden niet loodrecht staan op de bijbehorende l_i. Dit, zegt hij, leidt tot een oplossing van geheel andere aard, evenals in het geval waarin geen twee lijnen evenwijdig zijn.
Zoals voor de hand ligt, gaat Descartes ook in op het geval waarin $d_1 d_2 d_3 = a d_4 d_5$ (zie Figuur 5.3.1). De oplossingskromme is ook dan van geheel andere aard. Descartes geeft daarvan niet de vergelijking maar omschrijft deze op een ondoorzichtige wijze.Rabuel stelde later deze vergelijking op:

$$axy - xy^2 + 2a^2x = a^2y - ay^2.$$

(zie lit. [16] en [52]). Voor een meer gedetailleerde behandeling van het probleem van Pappus voor vijf lijnen en het verband met de Cartesische parabool, wordt de lezer verwezen naar het boeiende artikel van Bos ([5]), die daarbij ook de oorsprong van de methode van Descartes om door middel van gekoppelde continue bewegingen krommen te genereren, aan de orde stelt.

Met dit laatste geval van het vijflijnenprobleem besluit Descartes zijn behandeling van het probleem van Pappus, want, zegt hij, het was niet de bedoeling dit probleem uitputtend te behandelen en hij acht het voldoende een methode te hebben aangegeven om van de oplossingskromme oneindig veel punten te vinden.
Voordat hij op een ander onderwerp overgaat, namelijk toepassingen van zijn nieuwe methode, last hij een beschouwing in over het tekenen van toelaatbare krommen en speciaal over het onderscheid tussen algebraïsche en mechanische (later: transcendente) krommen.
Bij de mechanische krommen, zoals bijv. de spiraal en de quadratrix, vindt men bij de constructie niet alle punten, maar alleen die welke men met eenvoudiger middelen kan bepalen, terwijl de andere punten eigenlijk alleen met de kromme zelf gevonden zouden kunnen worden (interpolatie).
Bij de krommen die door middel van een ‘regelmatige continue beweging’ ontstaan, kan men elk willekeurig punt construeren en daarom verdient deze methode eveneens een plaats in de meetkunde, naast het gebruik van passer en liniaal alleen.
Ook een passend gebruik van de ‘touwtjesconstructies’ van kegelsneden sluit hij niet uit, maar met nadruk wijst hij erop dat de lengte van kromme lijnen “niet door mensen gekend kan worden.”
Op dit punt zou de geschiedenis hem in het ongelijk stellen. In 1659 gaf Van Heuraet in zijn *Epistula de Transmutatione Curvarum Linearum in Rectas* een methode om de lengte van een paraboolsegment en in het algemeen van krommen met vergelijking $y^n = \dfrac{x^{n+1}}{a}$ te bepalen, nadat in 1657 William Neil de rectificatie van de kubische parabool als geïsoleerd probleem had behandeld (zie [26] en [44]).
Tenslotte wijst hij er met nadruk op dat de vergelijking van een kromme ons in staat stelt alle belangrijke grootheden van deze kromme te bepalen, zoals middellijnen, assen, middelpunt en ook andere grootheden die betrekking hebben op deze

kromme, waardoor we andere mogelijkheden kunnen vinden om deze kromme te beschrijven om daaruit de eenvoudigste te kiezen.
Hierbij gebruikt hij het woord 'vergelijking' niet, maar spreekt hij over
Le rapport, qu'ont tous les poins d'une ligne courbe a tous ceux d'une ligne droite.

Als eerste toepassing van zijn nieuwe methode kiest hij de constructie van de normaal in een punt van een kromme, een ontdekking waarop hij bijzonder trots was, of, zoals hij het zelf zegt (*Géométrie*, blz.342):
Et i'ose dire que c'est cecy le problesme le plus utile, & le plus general non seulement que ie sçache, mais mesme que i'aye iamais desiré de sçavoir en Geometrie.
In vertaling:
En ik durf te zeggen dat dit niet alleen het nuttigste en het algemeenste probleem is dat ik ken, maar zelfs datgene dat ik altijd al heb willen doorgronden in de meetkunde.
Op dit punt zullen we de behandeling van het Pappusprobleem door Descartes afsluiten. Voor de toepassing van de parabool van Descartes op het oplossen van de zesdegraadsvergelijking, eigenlijk het hoofddoel van Descartes, wordt de lezer verwezen naar de literatuur (Bos [6] en Scott [52]).

Literatuur

[1] APOLLONIUS, *Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis edidit et Latine interpretatus est I. L. Heiberg*, Vols. I & II. Stuttgart, Teubner, 1974.

[2] ARCHIMEDES, *Opera Omnia cum Commentariis Eutocii edidit I.L.Heiberg, corrigenda adiecit E. S. Stamatis*. Stuttgart, Teubner, 1972.

[3] BOS, H.J.M., On the representation of curves in Descartes Géométrie. *Archive for History of Exact Sciences* 24 (1981) pp. 295-338.

[4] idem, *Descartes en het Begin van de Analytische Meetkunde*. C.W.I. syllabus 25, pp.79-97. Amsterdam, C.W.I., 1989.

[5] idem, *Descartes, Pappus' Problem and the Cartesian Parabola, a Conjecture*, Festschrift for D.T.WHITESIDE, ed. P.HARMAN and A. SHAPIRO. Cambridge, C.U.P.,1992

[6] idem, *The Structure of Descartes's Géométrie*. Lectures in the History of Mathematics 7, pp. 37-57. Providence, Rhode Island, American Mathematical Society, 1997.

[7] idem, *Redefining Geometrical Exactness*. New York etc., Springer-Verlag, 2001.

[8] BOYER, C.B., *History of Analytic Geometry*. New York, Scripta Mathematica, 1956.

[9] BUSARD, H.L.L., *Nicole Oresme, Quaestiones super Geometriam Euclidis*. Leiden, Brill, 1961.

[10] COOLIDGE, J.L., *The Mathematics of Great Amateurs*. New York, Dover Publications, 1963.

[11] idem, *A History of the Conic Sections and Quadratic Surfaces*. New York, Dover Publications (reprint), 1968.

[12] idem, *A History of Geometrical Methods*. New York, Dover Publications (reprint), 1963.

[13] CUOMO, S., *Pappus of Alexandria and the Mathematics of Late Antiquity*. Cambridge, University Press, 2000.

[14] DESCARTES RENÉ , *Oeuvres de Descartes*, ed. Ch. Adams et P. Tannery, Vol. VI, 1. Paris, Vrin/CNRS, 1964–1976.

[15] idem, *Œuvres Philosophiques*, ed. F. Alquié. Paris, Garnier Frères, 1963, 1967, 1973.

[16] idem, *The Geometry of René Descartes*, translated from the French and Latin by David Eugene Smith and Maria L. Latham. New York, Dover Publications, 1954.

[17] idem, *Geometrie,* Deutsch herausgegeben von Ludwig Schlesinger. Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1969.

[18] DIJKSTERHUIS, E.J., *De Elementen van Euclides I&II*. Groningen, Noordhoff, 1930.

[19] idem, *Archimedes I&II*. Groningen, Noordhoff, 1938. Translated into English by C. Dikshoorn. Copenhagen, Ejnaar Munksgaard, 1956.

[20] EUCLIDES, *Euclidis Elementa*, post I .L. Heiberg edidit E. S. Stamatis, Vols. I–V. Leipzig, Teubner, 1969–1977.
[21] FERMAT, PIERRE DE, *Oeuvres*. Paris, Gauthier Villars, 1891-1912.
[22] FLADT, K., *Geschichte und Theorie der Kegelschnitte und der Flächen zweiten Grades*. Stuttgart, Ernst Klett Verlag, 1963.
[23] FRUIN, R., *Brieven van Johan de Witt*, bewerkt door R. Fruin en uitgegeven door G.W. Kernkamp and N. Japikse Vol. IV. Amsterdam, Johannes Müller, 1913.
[24] GEER, P. VAN, Johan de Witt als wiskundige. *Nieuw Archief voor Wiskunde* (2), XI, (1915), pp. 98–126.
[25] GILLESPIE, C.C. (ed.), *Dictionary of Scientific Biography* (VIII Vols.). New York, Charles Scribner's Sons, 1981.
[26] GROOTENDORST, A.W., *Grepen uit de Geschiedenis van de Wiskunde*. Delft, D.U.P., 1988.
[27] idem, *De Meetkundige Algebra bij Euclides*. C.W.I. Syllabus 28, pp. 1-26. Amsterdam, C.W.I., 1991.
[28] idem, De Kegelsneden bij Jan de Witt. *Nieuw Archief voor Wiskunde* (4), XVII, (1999), pp. 409-425.
[29] HEATH, SIR THOMAS, L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, translated from the text of Heiberg, with Introduction and Commentary by Sir Thomas L. Heath, Vols. I–III. New York, Dover Publications, 1956.
[30] idem, *Apollonius of Perga, Treatise on Conic Sections*. Cambridge, Barnes and Noble (reprint), 1961.
[31] idem, *The Works of Archimedes*. New York, Dover Publications (reprint), 1953.
[32] idem, *A History of Greek Mathematics*, Vols. I&II. Oxford, London, etc., Oxford University Press, 1965.
[33] HOFMANN, J.E., *Frans van Schooten der Jüngere*. Wiesbaden, Franz Steiner Verlag, 1962.
[34] HOGENDIJK, J.P., *Kegelsneden in de Griekse Oudheid*. C.W.I. syllabus 40, pp. 1-20. Amsterdam, C.W.I., 1995.
[35] idem, Book I of Jan de Witt's Elementa Curvarum Linearum and the Conics of Apollonius. *Nieuw Archief voor Wiskunde* (4), XVII, (1999), pp. 453–463.
[36] HULTSCH, F., *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt*, Vol. I & II. Berlijn, Weidmann, 1877.
[37] HUYGENS, CHRISTIAAN, *Œuvres complètes de Christiaan Huygens*, publiées par la Société Hollandaise des Sciences, Vols. I–XXII. Den Haag, 1888–1950.
[38] JAPIKSE, N., *Johan de Witt*. Amsterdam, Meulenhof, 1915.
[39] KATZ, V.J., *A History of Mathematics, an Introduction*. New York, Harper Collins College Publications, 1992.
[40] KLEIN, J., *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*. Cambridge Massachusetts, and London, The M. I. T. Press, 1968.

[41] KLINE, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York, Oxford University Press, 1972.

[42] KNORR, W.R., *The Evolution of the Euclidean Elements*. Dordrecht, Reidel, 1975.

[43] idem, *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. New York, Dover Publications Inc., 1993.

[44] MAANEN, J.A. VAN, *Facets of Seventeenth Century Mathematics in the Netherlands*. Utrecht, Elinkwijk, 1987.

[45] MAHONEY, M.S., *The Mathematical Career of Pierre de Fermat (1601-1665)*. Princeton, New Yersey, Princeton University Press, 1973.

[46] MORROW, G., *Proclus; A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1970.

[47] RABUEL, CLAUDE, *Commentaire sur la Géométrie de M. Descartes*. Lyons, 1730.

[48] ROWEN, H.H., *John de Witt, Grand Pensionary of Holland, 1625–1672*. Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1978.

[49] idem., *John de Witt, Statesman of the True Freedom*. Cambridge, Cambridge University Press, 1986.

[50] SCHOOTEN JR., F. VAN, *Geometria à Renato Des Cartes Anno 1637 Gallicè edita; postea autem unà cum Notis Florimondi de Beaune, (...) in Latinam linguam versa, & Commentariis illustrata, opera atque studio Francisci à Schooten*. Leiden, Jan Maire, 1649. Herziene en aangevulde editie in 1659.

[51] SCOTT, J.F., *The Mathematical Work of John Wallis, D.D., F.R.S. (1616–1670)*. London, Taylor and Francis, 1938.

[52] idem, *The Scientific Work of René Descartes*. London, Taylor and Francis, 1976.

[53] STECK, M., *Proklos Diadochus (410–485); Kommentar zum Ersten Buch von Euklids "Elementen."* Halle, Deutsche Akademie der Naturforscher, 1945.

[54] STEINER, JAKOB, *Geometrical Constructions with a Ruler* (a translation of his 1833 book). New York, Scripta Mathematica, 1950.

[55] THAER, C., *Euklid, die Elemente. Buch I–XIII*. Herausgegeben und ins Deutsche Übersetzt von Clemens Thaer. Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1962.

[56] THOMAS, IVOR, *Greek Mathematics*, Vols. I&II. Cambridge Mass., Harvard University Press, 1957.

[57] TOOMER, G.J., *Diocles on Burning Mirrors*. New York etc., Springer-Verlag, 1976.

[58] VER EECKE, PAUL, *Les Coniques d'Apollonius de Perge*. Œuvres traduites pour la première fois du Grec en Français. Bruges, Desclée de Brouwer et Cie, 1923.

[59] VER EECKE, PAUL, *Pappus d'Alexandrie, la Collection Mathématique*, Tome I, Tome II. Bruges, Desclée de Brouwer et Cie, 1933.

[60] VIDELA, CARLOS, R, On Points Constructible from Conics. *Mathematical Intelligencer* ,Vol.10 (1997), pp. 53-57.

[61] VIÈTE, FRANÇOIS, *Opera Mathematica* (herdruk van ed. 1646). Hildesheim, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, 1970.
[62] VRIES H.K. DE, Historische Studiën II, *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*. 12e Jrg. 1924/25, pp. 260–288
[63] WAERDEN, B.L. van der, *Science Awakening*. Groningen, Noordhoff, 1954.
[64] idem, *A History of Algebra*. New York etc., Springer-Verlag, 1985.
[65] WALLIS, JOHN, *Opera Mathematica*, Vols. I–III. Oxford, Th. Robinson, 1697–1699.
[66] idem, *Opera Mathematica*, Vols. I–III. Reprint introduced by C.J. Scriba. Hildesheim-New York, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, 1972.
[67] WITT, JAN DE, *Elementa Curvarum Linearum-Liber Primus*, Tekst, vertaling inleiding en commentaar door A.W. Grootendorst. Amsterdam, Centrum voor Wiskunde en Informatica, 1997.
[68] idem, *Elementa Curvarum Linearum, Liber Primus*, Text, translation, introduction and commentary by Albert W. Grootendorst (with the help of Miente Bakker). Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, New York etc., Springer-Verlag, 2000.
[69] WICKEFOORT CROMMELIN, H.S.M. van, *Johan de Witt en zijn Tijd*. Amsterdam, Nederlandse Algemene Maatschappij van Levensverzekering "Conservatrix," 1913.
[70] ZEUTHEN, H.G., *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*. Kopenhagen, A.F. Host, 1896.
[71] idem, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*. Hildesheim, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, 1966.

Bronnen illustraties

Afbeeldingen op bladzijde iii en iv

René Descartes:	Fragment uit het schilderij *Descartes, Spinoza en Bacon* van Norman Carter (1921).
Pierre de Fermat:	*Images of SMC research 1996*, blz. 286, Amsterdam, CWI, 1996.
Frans van Schooten jr:	Schilderij van Hiëronymus van der My (1687–1761) naar een portret door Adriaen Cornelisz Beeldemaker (1618–1709). Bron: Collectie Academisch Historisch Museum, Rapenburg 73, 2311 GJ Leiden.
François Viète:	STRUIK, DIRK J., *A Concise History of Mathematics*, blz. 117. London, G. Bell and Sons Ltd, 1965.
Jan de Witt:	Schilderij van Adriaen Hanneman (1601–1670). Bron: Museum Boijmans Van Beuningen, Rotterdam.

Overige illustraties in Hoofdstuk 1-5

De meeste figuren zijn door R.T. Baanders gemaakt met de volgende uitzonderingen:

- Figuur 5.1.8 is geïnspireerd door HEATH [30]
- Figuur 5.2.1 is ontleend aan DESCARTES [16]
- Figuur 5.3.3 is ontleend aan J.D. LAWRENCE, *A Catalog of Special Curves*. New York, Dover Publications, 1972.

Dr. A.W. Grootendorst (*1924) studeerde aan de Universiteit Leiden, aanvankelijk Oude Talen, maar hij stapte na een jaar over op de studie van de wiskunde, zonder echter de Klassieke Letteren uit het oog te verliezen.
In 1959 promoveerde hij op een proefschrift, getiteld *Theta-reeksen in verband met relatief-kwadratische getallenlichamen*; zijn promotor was prof. dr. H.D. Kloosterman.
Na een periode van vier jaren als leraar aan het Gymnasium Haganum was hij tot zijn emeritaat in 1989 verbonden aan de Technische Universiteit Delft, aanvankelijk als wetenschappelijk medewerker, daarna respectievelijk als lector en hoogleraar. Met zijn collega prof. dr. B. Meulenbeld schreef hij een driedelig leerboek over de Analyse.
Tot de artikelen die hij publiceerde behoren o.a. vertalingen van in het Latijn gestelde wiskundige teksten en verhandelingen over de geschiedenis van de wiskunde. Een aantal daarvan is bijeengebracht in de bundel *Grepen uit de Geschiedenis van de Wiskunde*. Met W.C. Waterhouse en C. Greither verzorgde hij een herziene vertaling van de *Disquisitiones Arithmeticae* van C.F. Gauß.
In 1997 verscheen de door hem geschreven en geannoteerde Nederlandse vertaling van *Elementa Curvarum Linearum – Liber Primus* van Jan de Witt. In 2000 publiceerde hij in samenwerking met dr. Miente Bakker een Engelse vertaling daarvan. Deze verscheen bij Springer-Verlag New York in de serie *Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences*.